

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный университет»

16+
ISSN 2071-6176

ИЗВЕСТИЯ
ТУЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

Естественные науки

Выпуск 2

ТУЛА
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТулГУ
2015

Известия ТулГУ. **Естественные науки**. Вып. 2. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. 143 с.

В выпуске опубликованы оригинальные статьи по актуальным проблемам математики, механики, физики, химии, биологии.

Материалы предназначены для научных работников, преподавателей вузов, студентов и аспирантов, специализирующихся в области естественных наук.

Редакционный совет

М.В. Грязев — председатель, В.Д. Кухарь — зам. председателя, В.В. Прейс — главный редактор, А.А. Маликов — отв. секретарь, И.А. Батанина, О.И. Борискин, А.Ю. Головин, В.Н. Егоров, В.И. Иванов, Н.М. Качурин, В.М. Петровичев

Редакционная коллегия

В.И. Иванов (Тула) — отв. редактор, В.А. Алфёров (Тула), И.М. Буркин (Тула), Н.М. Добровольский (Тула), Д.М. Левин (Тула), А.А. Маркин (Тула) — зам. отв. редактора, Е.Н. Музафаров (Тула), Л.А. Толоконников (Тула), С.А. Скобельцын (Тула) — отв. секретарь, В.Г. Кротов (Минск, Беларусь), В.В. Литвиненко (Харьков, Украина), Н.П. Матвейко (Минск, Беларусь), В.М. Мирсалимов (Баку, Азербайджан), Н.Т. Темиргалиев (Астана, Казахстан), М.Ш. Шабозов (Душанбе, Таджикистан)

Подписной индекс 27845 по Объединенному каталогу «Пресса России»

Сборник зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). ПИ № ФС 77-61106 от 19 марта 2015 г.

«Известия ТулГУ» входят в перечень ведущих научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых должны быть опубликованы научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук

© Авторы научных статей, 2015

© Издательство ТулГУ, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Горбачев Д. В.* Некоторые неравенства для дискретных положительно определенных функций 5
- Логачева Е. С.* Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением 13

МЕХАНИКА

- Глаголев В. В., Маркин А. А.* Термомеханика разрушения тел с трещиноподобным дефектом 36
- Маркин А. А., Козлов В. В.* Комбинированный сдвиг сжимаемого нелинейно-упругого полого цилиндра 42
- Маркин А. А., Харламов А. С.* Геометрия поперечных сечений балки при ее конечном чистом изгибе с учетом сдвиговых деформаций 53
- Скобельцын С. А., Толоконников Л. А.* Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности 64
- Толоконников Л. А.* Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами 76
- Христич Д. В., Астапов Ю. В.* Конечное неизотермическое деформирование резинового шара 84

ФИЗИКА

- Головнев Ю. Ф., Сомова Н. Ю.* Образование межъямных экситонов в двойных квантовых ямах EuO-SrO-EuO 91
- Шопин С. А., Скобельцын С. А.* Анализ данных приборных систем широкополосных градиентометров с помощью метода наложенных эпох 98

ХИМИЯ

- Юдина Н. Ю., Козлова Т. Н., Мельников П. В., Арляпов В. А.* Выбор основы рецепторного элемента БПК-биосенсора по субстратной специфичности и параметрам роста дрожжей *Debaryomyces hansenii* 108

БИОЛОГИЯ

- Ягольник Е. А., Музафаров Е. Н., Ким Ю. А., Тараховский Ю. С.* Взаимодействие флавонола кверцетина с коллагеном 121

Contents.....	133
Редколлегия	134
Editorial Board.....	136
Порядок представления и правила оформления рукописей статей.....	138

Некоторые неравенства для дискретных положительно определенных функций *

Д.В. Горбачев

Аннотация. Для положительно определенных функций в кольце вычетов \mathbb{Z}_q изучается дискретный аналог неравенства Винера

$$\sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2 \leq C_q(d) \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2, \quad d < q/2.$$

Для константы $C_q(d)$ получены оценки $\frac{q}{2d+1} \leq C_q(d) \leq \frac{q}{d+1}$. Установлена связь дискретного неравенства Винера с дискретной задачей Фейера. Для дискретных неотрицательных положительно определенных функций доказано неравенство

$$\sum_{x=-2d}^{2d} f(x) \leq \pi^2 \sum_{x=-d}^d f(x),$$

имеющее приложения в теории чисел.

Ключевые слова: положительно определенная функция, неравенство Винера, дискретное преобразование Фурье, дискретная экстремальная задача Фейера.

Введение

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ — положительно определенная функция. Н. Винер доказал следующее утверждение (см. [1]): если $f \in L^2(-\delta, \delta)$, $0 < \delta < 1/2$, то $f \in L^2(\mathbb{T})$. Другими словами, если коэффициенты Фурье функции f неотрицательны:

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e(-\nu x) dx \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \quad e(t) = \exp(2\pi i t),$$

то справедливо неравенство

$$\int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|^2 dx \leq C \int_{-\delta}^{\delta} |f(x)|^2 dx,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00045), Министерства образования и науки РФ (госзадание № 5414ГЗ) и Фонда Дмитрия Зимина «Династия».

где константа $C > 0$ не зависит от f .

В работе [2] доказано, что

$$C \leq \delta^{-1}, \quad 0 < \delta < 1/2. \quad (1)$$

Если рассмотреть функцию $f \equiv 1$, то получим $C \geq (2\delta)^{-1}$. Чуть сложнее доказывается (см. [3]), что если $\delta^{-1} \notin \mathbb{N}$, то

$$C \geq [\delta^{-1}]. \quad (2)$$

В этой работе мы рассмотрим близкие неравенства в дискретном случае. Будем использовать рассуждения, которые часто применяются в аналитической теории чисел (см., например, [4]).

Пусть $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ — кольцо вычетов по модулю $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $x, \nu \in \mathbb{Z}_q$, $f(x)$ — дискретная функция, $\widehat{f}(\nu)$ — ее дискретное преобразование Фурье:

$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{x=0}^{q-1} f(x)e_q(-\nu x), \quad e_q(t) = e(t/q).$$

Функция f будет положительно определенной тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(\nu) \geq 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}_q$.

Пусть $d \in \mathbb{Z}_+$, $d < q/2$. В разделе 1 мы докажем аналог неравенства Винера вида

$$\sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2 \leq C_q(d) \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2$$

и приведем двусторонние оценки константы $C_q(d)$. В разделе 2 установим близкое неравенство для неотрицательных положительно определенных функций

$$\sum_{x=-2d}^{2d} f(x) \leq \pi^2 \sum_{x=-d}^d f(x).$$

Задача получения подобного неравенства была поставлена Ю.Н. Штейниковым в связи с приложениями к теории чисел.

1. Дискретное неравенство Винера

Если положить $f \equiv 1$, то получим тривиальную оценку

$$C_q(d) \geq \frac{q}{2d+1}.$$

Пусть K — произвольная дискретная четная неотрицательная положительно определенная функция такая, что $K(0) = 1$ и носитель

$$\text{supp } K = \{x \in \mathbb{Z}_q : K(x) \neq 0\} \subset \{-d, \dots, d\}.$$

ЛЕММА 1. Для произвольной дискретной положительно определенной функции f справедливо неравенство

$$\sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2 \leq \frac{q}{\widehat{K}(0)} \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2.$$

Аналог этой леммы использовался для доказательства неравенства (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию f при помощи обратного дискретного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) e_q(\nu x).$$

Отсюда следует, что

$$|f(x)|^2 = f(x) \overline{f(x)} = \frac{1}{q^2} \sum_{\nu, \nu'=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) \overline{\widehat{f}(\nu')} e_q((\nu - \nu')x)$$

и

$$I = \sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2 K(x) = \frac{1}{q^2} \sum_{\nu, \nu'=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) \overline{\widehat{f}(\nu')} \widehat{K}(\nu' - \nu).$$

Из условия на носитель функции K , равенства $K(0) = 1$ и неравенства $K(x) \leq K(0)$, $x \in \mathbb{Z}_q$, справедливого для любой положительно определенной функции, имеем

$$I = \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2 K(x) \leq \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2. \quad (3)$$

С другой стороны, используя условия положительной определенности $\widehat{K} \geq 0$, $\widehat{f} \geq 0$ и равенство Парсеваля

$$\sum_{x=0}^{q-1} f(x) \overline{g(x)} = \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) \overline{\widehat{g}(\nu)},$$

находим

$$I \geq \sum_{\nu=\nu'} = \frac{\widehat{K}(0)}{q^2} \sum_{\nu=0}^{q-1} |\widehat{f}(\nu)|^2 = \frac{\widehat{K}(0)}{q} \sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2.$$

Лемма доказана.

Пусть $a = d + 1$. В качестве примера допустимой функции K в лемме можно взять известную функцию [4]

$$K_a(x) = \left(1 - \frac{|x|}{a}\right)_+, \quad (4)$$

где $(t)_+ = \max\{0, t\}$. Дискретное преобразование Фурье функции K_a выражается через ядро Фейера:

$$\widehat{K}_a(\nu) = \sum_{|x|<a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) e\left(-\frac{\nu x}{q}\right) = F_a\left(\frac{\nu}{q}\right), \quad (5)$$

где

$$F_a(u) = \frac{1}{a} \left(\frac{\sin(\pi a u)}{\sin(\pi u)}\right)^2.$$

В этом случае $\widehat{K}_a(0) = a$ и получаем следующий результат.

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$C_q(d) \leq \frac{q}{d+1}.$$

Покажем, что эта оценка точная, если a делит q .

ТЕОРЕМА 1. *Если $q = s(d+1)$, $s \in \mathbb{N}$, то*

$$C_q(d) = \frac{q}{d+1} = s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим четную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, a, 2a, \dots, (s-1)a, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Имеем

$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{k=0}^{s-1} e(k\nu/s) = \begin{cases} s, & \nu = 0, s, 2s, \dots, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

поэтому функция f является положительно определенной. Для нее

$$\sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2 = \sum_{k=0}^{s-1} 1 = s, \quad \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2 = |f(0)|^2 = 1.$$

Следовательно, $C_q(d) \geq s$. Теорема доказана.

Если a не делит q , то оценку из леммы 2 можно уточнить. Для этого рассмотрим экстремальную задачу нахождения допустимой функции K с максимальным значением $\widehat{K}(0)$:

$$A_q(d) = \max_K \widehat{K}(0).$$

Тогда

$$C_q(d) \leq \frac{q}{A_q(d)} \leq \frac{q}{d+1}.$$

Задача $A_q(d)$ тесно связана с дискретными экстремальными задачами Турана и Фейера, исследованными в работах [5–10]. Нам потребуется решение следующей дискретной задачи Фейера:

$$\lambda(a, q) = \sup_h h(0),$$

где верхняя грань берется по четным тригонометрическим полиномам

$$h(u) = \sum_{|k| < a} \alpha_k e(ku) = \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^d \alpha_k c(ku), \quad c(t) = \cos(2\pi t),$$

таким что $\alpha_0 = 1$, все коэффициенты $\alpha_k \geq 0$ и $h(l/q) \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}_q$.

Положим $K(x) = \alpha_x$ при $|x| < a$ и $K(x) = 0$ при $|x| \geq a$, $x \in \mathbb{Z}_q$. Тогда K — четная неотрицательная функция, $K(0) = 1$, $\text{supp } K \subset \{-d, \dots, d\}$ и $\widehat{K}(\nu) = h(\nu/q) \geq 0$, $\nu \in \mathbb{Z}_q$. Следовательно, дискретная функция K является допустимой в задаче $A_q(d)$ и

$$\lambda(a, q) = A_q(d).$$

Решение задачи $\lambda(a, q)$ записывается следующим образом [7, 9]: если наибольший общий делитель $(a, q) = 1$, то

$$\lambda(a, q) = F_{a,q}(0),$$

где

$$F_{a,q}(u) = \lambda_0 \prod_{k=1}^d (c(u) - c(u_k)), \quad c(t) = \cos(2\pi t),$$

$qu_k = k\bar{r}$, $\bar{r} \in \mathbb{Z}_q$, $\bar{r}a = 1$ или $\bar{r}(q - a) = 1$ в \mathbb{Z}_q (см. [7, 9]), коэффициент $\lambda_0 > 0$ выбирается из условия нормировки $\alpha_0 = 1$.

Если $s = (a, q) \geq 1$, то

$$\lambda(a, q) = s \lambda\left(\frac{a}{s}, \frac{q}{s}\right)$$

и экстремальный полином имеет вид $F_{a,q}(u) = F_s(u)F_{a/s,q/s}(su)$.

Если a не делит q , то $\lambda(a, q) > a$ [7, 9]. Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d + 1$ не делит q . Тогда

$$C_q(d) \leq \frac{q}{\lambda(d + 1, q)} < \frac{q}{d + 1}.$$

Представляет интерес получить в условиях теоремы 2 для константы $C_q(d)$ оценку снизу, лучшую тривиальной. Мы не рассматриваем здесь эту задачу.

2. Неравенство для неотрицательных функций

ТЕОРЕМА 3. Для произвольных q , $d < q/4$, и дискретной неотрицательной положительно определенной функции f справедливо неравенство

$$\sum_{x=-2d}^{2d} f(x) \leq \pi^2 \sum_{x=-d}^d f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $K_a(x)$ из (4) и ее дискретное преобразование Фурье (5).

При $u \in \mathbb{R}$ имеем $|\sin(\pi u)| \leq |\pi u|$, поэтому

$$F_a(u) \geq \frac{1}{a} \left(\frac{\sin(\pi a u)}{\pi u} \right)^2 = a j^2(a u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где $j(t) = (\pi t)^{-1} \sin(\pi t)$.

Функция $j(t)$ выпуклая вверх при $|t| \leq 1$, поэтому $j(t) \geq 1 - |t|$, $|t| \leq 1$. Отсюда следует, что $j^2(t) \geq (1 - 4|t|)_+$, $t \in \mathbb{R}$, и

$$F_a(u) \geq a(1 - 4a|u|)_+, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

По равенству Парсеваля

$$I = \sum_{x=0}^{q-1} f(x) K_a(x) = \frac{1}{q} \sum_{\nu=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) \widehat{K}_a(\nu).$$

Из неравенства (7) и равенств (4), (5) имеем

$$\widehat{K}_a(\nu) \geq a \left(1 - \frac{4a|\nu|}{q} \right)_+ = a K_{q/(4a)}(\nu), \quad \nu \in \mathbb{Z}_q.$$

Используя условие $\widehat{f} \geq 0$, получаем

$$I \geq \frac{a}{q} \sum_{\nu=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) K_{q/(4a)}(\nu).$$

Отсюда, применяя равенство

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) g(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1} \widehat{f}(\nu) \frac{1}{q} \sum_{x=0}^{q-1} \widehat{g}(x) e_q(\nu x) = \sum_{x=0}^{q-1} f(x) \widehat{g}(x),$$

условие $f \geq 0$ и неравенство (6), находим

$$I \geq \frac{a}{q} \sum_{x=0}^{q-1} f(x) \widehat{K}_{q/(4a)}(x) = \frac{a}{q} \sum_{x=0}^{q-1} f(x) F_{q/(4a)}\left(\frac{x}{q}\right) \geq \frac{1}{4} \sum_{x=0}^{q-1} f(x) j^2\left(\frac{x}{4a}\right).$$

Четная функция $j(t)$ убывает к нулю при $t \in [0, 1]$, поэтому для $|x| \leq 2d < 2a$ имеем

$$j^2\left(\frac{x}{4a}\right) \geq j^2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2.$$

Следовательно,

$$I \geq \frac{1}{\pi^2} \sum_{|x| \leq 2d} f(x).$$

При этом аналогично (3)

$$I \leq \sum_{|x| \leq d} f(x).$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Wainger S.* A problem of Wiener and the failure of a principle for Fourier series with positive coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 20. P. 16–18.
2. *Shapiro H.S.* Majorant problems for Fourier coefficients // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1975. V. 26. P. 9–18.
3. *Bonami A., Révész Sz. Gy.* Failure of Wiener's property for positive definite periodic functions // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2008. V. 346. № 1–2. P. 39–44.
4. *Montgomery H.L.* Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
5. *Горбачев Д.В., Маношина А.С.* Экстремальная задача Турана для периодических функций с малым носителем и ее приложения // Математические заметки. 2004. Т. 76. № 5. С. 688–700.
6. *Иванов В.И., Рудомазина Ю.Д.* О задаче Турана для периодических функций с неотрицательными коэффициентами Фурье и малым носителем // Математические заметки. 2005. Т. 77. № 6. С. 941–945.
7. *Иванов В.И., Горбачев Д.В., Рудомазина Ю.Д.* Некоторые экстремальные задачи для периодических функций с условиями на их значения и коэффициенты Фурье // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 2. С. 92–111.
8. *Иванов В.И.* О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Математические заметки. 2006. Т. 80. № 6. С. 934–939.
9. *Иванов В.И., Рудомазина Ю.Д.* Некоторые экстремальные задачи для дискретных периодических функций // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2008. Вып. 17. С. 169–224.
10. *Ivanov V.I., Ivanov A.V.* Turan problems for periodic positive definite functions // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. 2010. V. 33. P. 219–237.

Горбачев Дмитрий Викторович (dvgmail@mail.ru), д.ф.-м.н., профессор, кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

Some inequalities for discrete positive definite functions

D.V. Gorbachev

Abstract. For positive definite functions in the ring \mathbb{Z}_q we study the discrete analog of Wiener inequality

$$\sum_{x=0}^{q-1} |f(x)|^2 \leq C_q(d) \sum_{x=-d}^d |f(x)|^2, \quad d < q/2.$$

For the constant $C_q(d)$ we got bounds $\frac{q}{2d+1} \leq C_q(d) \leq \frac{q}{d+1}$. The connection between discrete Wiener inequality and discrete Fejér problem is established. For nonnegative positive definite functions we proved inequality

$$\sum_{x=-2d}^{2d} f(x) \leq \pi^2 \sum_{x=-d}^d f(x),$$

which has applications in the number theory.

Keywords: positive definite function, Wiener inequality, discrete Fourier transform, discrete extremal Fejér problem.

Gorbachev Dmitry (dvgmail@mail.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

Поступила 15.01.2015

УДК 519.4

Проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN -расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением

Е. С. Логачева

Аннотация. Положительно решена проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп в HNN -расширении древесного произведения бесконечных циклических групп с объединением по бесконечной циклической подгруппе.

Ключевые слова: группа, подгруппа, HNN -расширение, древесное произведение, проблема сопряженности.

Введение

Рассмотрим конечный дерево-граф Γ . Каждой его вершине v_i соответствует бесконечная циклическая группа $\langle a_i \rangle$, причем если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют образующие a_i и a_j , то самому ребру соответствуют ассоциированные подгруппы $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle = \langle a_j^{q_{ji}} \rangle$. Тогда группа G_Γ , соответствующая графу Γ , называется древесным произведением циклических групп с ассоциированными циклическими подгруппами.

Копредставление группы G_Γ имеет вид:

$$G_\Gamma = \left\langle \prod_{k=1}^n * \langle a_k \mid a_i^{p_{ij}} = a_j^{q_{ji}}, |p_{ij}|, |q_{ji}| \geq 1, i, j = \overline{1, n} \right\rangle, \quad (1)$$

где $\langle a_i^{p_{ij}} \rangle$ и $\langle a_j^{q_{ji}} \rangle$ — ассоциированные подгруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент $z \in G$ такой, что $z^{-1}H_1z = H_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. В группе G_Γ (1) разрешима проблема сопряженности слов.

ЛЕММА 1 [3]. Для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle$, $k = \overline{1, n}$, где a_k - образующий группы G_Γ , существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.

ЛЕММА 2 [3]. Для любого слова $v \in G_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$, где $a_k \in G_\Gamma$, $k = \overline{1, n}$.

ТЕОРЕМА 1 [4]. В группе G_Γ (1) разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.

Далее рассмотрим HNN -расширение группы G_Γ с помощью правильной проходной буквы t :

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | \text{rel}(G_\Gamma), t^{-1}U_1t = U_{-1} \rangle, \quad (2)$$

где $U_1 = \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle$, $U_{-1} = \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle$, $|s_{ij}|, |k_{ji}| \geq 1$, $i, j = \overline{1, n}$, a_{i_0}, a_{j_0} — образующие группы G_Γ .

ЛЕММА 3 [5]. Для любой конечно порожденной подгруппы $H < \overline{G}_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle a_k \rangle$, $k = \overline{1, n}$, где a_k — образующий группы G_Γ , существует алгоритм, позволяющий выписать образующие пересечения $H \cap \langle a_k \rangle$.

ЛЕММА 4 [5]. Для любого слова $v \in \overline{G}_\Gamma$ и любой конечно порожденной подгруппы $H < \overline{G}_\Gamma$, существует алгоритм, позволяющий выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle a_k \rangle$, где $a_k \in G_\Gamma$, $k = \overline{1, n}$.

ТЕОРЕМА 2 [3]. В группе \overline{G}_Γ (2) разрешима проблема сопряженности слов.

Справедлива также следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3 [2]. В группе $\langle a, t | t^{-1}a^m t = a^n \rangle$ разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.

Цель данной работы — доказать основную теорему:

ТЕОРЕМА 4. В группе $\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | \text{rel}(G_\Gamma), t^{-1}U_1t = U_{-1} \rangle$, где $U_1 = \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle$, $U_{-1} = \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle$, $|s_{ij}|, |k_{ji}| \geq 1$, $i, j = \overline{1, n}$, разрешима проблема сопряженности конечно порожденных подгрупп.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть H_1, H_2 — две конечно порожденные подгруппы группы G_Γ , причем H_1 и H_2 одновременно не сопряжены ассоциированной подгруппе U_ε , $\varepsilon = \pm 1$. Тогда подгруппы H_1 и H_2 сопряжены в группе \overline{G}_Γ тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе G_Γ .

1. Специальное множество слов для группы \overline{G}_Γ

Рассмотрим специальное множество слов группы

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t|relG_\Gamma, t^{-1}U_1t = U_{-1} \rangle,$$

$$U_1 = \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle, U_{-1} = \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle, |s_{ij}|, |k_{ji}| \geq 1, i, j = \overline{1, n}.$$

Известно [6], что каждый элемент $g \in \overline{G}_\Gamma$ может быть единственным образом представлен в виде

$$g = B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, k}$. Слоги $B_j, j = \overline{1, k}$ — представители левого класса смежности группы G_Γ по подгруппе U_1 , если $\varepsilon_j = 1$, и по подгруппе U_{-1} , если $\varepsilon_j = -1$.

Обозначим X — множество представителей левых смежных классов группы G_Γ по подгруппе U_1 , Y — множество представителей левых смежных классов группы G_Γ по подгруппе U_{-1} . Тогда $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$ и $Y^{-1} = \{y^{-1} | y \in Y\}$ — множества представителей правых смежных классов группы G_Γ по подгруппам U_1 и U_{-1} соответственно.

Буквой l будем обозначать элементы из множества представителей левых классов смежности, буквой r — представителей правых смежных классов. Тогда несократимое слово (3), имеющее нечетное число слогов можно представить в виде

$$g = t^\alpha l_1 g t^{\varepsilon_1} l_2 g t^{\varepsilon_2} \dots l_s g t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s} r_s g t^{\varepsilon'_{s-1}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_1 g t^\beta, \quad (4)$$

где $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1, \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon'_i = \pm 1, i = \overline{1, s}, K_g$ — ядро слова g , причем если $K_g \in \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle$ и $\varepsilon_s = -1$, то $\varepsilon'_s \neq 1$, аналогично, если $K_g \in \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle$ и $\varepsilon_s = 1$, то $\varepsilon'_s \neq -1$.

Несократимое слово, имеющее четное число слогов, может быть представлено в виде

$$g = t^\alpha l_1 g t^{\varepsilon_1} l_2 g t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{s-1}} l_s g h t^{\varepsilon'_s} r_s g t^{\varepsilon'_{s-1}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_1 g t^\beta, \quad (5)$$

где $h \in \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle$, если $\varepsilon'_s = 1$ и $h \in \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle$, если $\varepsilon'_s = -1$.

Под длиной слова g будем понимать длину несократимого равного ему слова g' . Под длиной слова (4) будем понимать число $l(g) = 2s + 1$, под длиной слова (5) — число $l(g) = 2s$. Представление слова группы \overline{G}_Γ в несократимой форме (4) или (5) будем называть каноническим представлением. Слова вида (4), у которых $t^\alpha l_1 g t^{\varepsilon_1} l_2 g t^{\varepsilon_2} \dots l_s g t^{\varepsilon_s} = (t^{\varepsilon'_s} r_s g t^{\varepsilon'_{s-1}} \dots t^{\varepsilon'_1} r_1 g t^\beta)^{-1}$, будем называть трансформами, слова вида (4), не являющиеся трансформами, а также слова вида (5) будем называть нетрансформами. Причем нетрансформы типа (4) — нетрансформы нечетной длины, а типа (5) — нетрансформы четной длины.

В слове (4) начальный $t^\alpha l_{1g} t^{\varepsilon_1} l_{2g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{sg} t^{\varepsilon_s}$ отрезок назовем закрытой левой половиной, конечный отрезок $t^{\varepsilon'_s} r_{sg} t^{\varepsilon'_s-1} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1g} t^\beta$ — закрытой правой половиной, а отрезки $t^\alpha l_{1g} t^{\varepsilon_1} l_{2g} t^{\varepsilon_2} \dots l_{sg} t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s}$ — закрытым большим начальным отрезком, $t^{\varepsilon_s} K_g t^{\varepsilon'_s} r_{sg} t^{\varepsilon'_s-1} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1g} t^\beta$ — закрытым большим конечным отрезком.

В слове $g = t^\alpha B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{i-1}} B_i t^{\varepsilon_i} \dots B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1} t^\beta$, где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, n}$, отрезок $t^\alpha B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{i-1}} B_i$ назовем начальным открытым отрезком, а $t^\alpha B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{i-1}} B_i t^{\varepsilon_i}$ — начальным закрытым отрезком. Аналогичные понятия вводятся для конечных отрезков.

Пусть $W = \{w_i\}_{i=\overline{1, N}}$ — конечное множество слов группы \overline{G}_Γ , каждое из которых приведено к виду (4) либо (5). Будем говорить, что у слова $w_j^\varepsilon = t^{\alpha_j} B_1 t^{\varepsilon_1} B_2 t^{\varepsilon_2} \dots B_k t^{\varepsilon_k} B_{k+1} t^{\beta_j}$, где $\alpha_j = 0, \pm 1, \beta_j = 0, \pm 1, \varepsilon = \pm 1, \varepsilon_i = -1, i = \overline{1, k}, w_j \in W$, закрытый начальный отрезок изолирован в W , если он не является начальным отрезком ни у какого $w_i^\eta \in W, \eta = \pm 1, w_i \in W$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Назовем специальным конечное множество слов $W = \{w_i\}_{i=\overline{1, N}}$ группы \overline{G}_Γ , если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) закрытая левая половина слова $w_i \in W$, являющегося нетрансформой, изолирована в W ; если w_i — нетрансформа четной длины, то ее закрытая левая половина и закрытая правая половина изолированы в W ;

2) длину произвольного элемента $w_j \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово $v \in \langle \{w_i\}_{i=\overline{1, N}} \rangle$, где $l(v) < l(w_j)$;

3) пусть $w_j^\varepsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\varepsilon_1} l_{2w_j} t^{\varepsilon_2} \dots l_{sw_j} t^{\varepsilon_s} K_{w_j} t^{\varepsilon'_s} r_{sw_j} t^{\varepsilon'_s-1} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta$, где $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1, \varepsilon_i = \pm 1, w_j$ — нетрансформа вида (4) из W либо

$$w_j^\varepsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\varepsilon_1} l_{2w_j} t^{\varepsilon_2} \dots l_{sw_j} h t^{\varepsilon'_s} r_{sw_j} t^{\varepsilon'_s-1} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где $\alpha = 0, \pm 1, \beta = 0, \pm 1, \varepsilon_i = \pm 1, w'_j$ — нетрансформа вида (5) из W и $\{w_y^{\eta_y} = t^{\alpha_y} l_{1w_y} t^{\varepsilon_{1y}} l_{2w_y} t^{\varepsilon_{2y}} \dots l_{sw_y} t^{\varepsilon_{sy}} \dots r_{i+1, w_y} t^{\varepsilon'_i} r_{iw_y} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_y} t^{\beta_y}\}$, где $\eta_y = \pm 1, \alpha_y = 0, \pm 1$; подмножество нетрансформ из множества $\{\{w_i\}_{i=\overline{1, N}} \setminus w_j\} \cup \{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1, N}} \setminus w_j^{-1}\}$, закрытая правая половина которых оканчивается на $t^{\varepsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_y}$, тогда если подгруппа

$$H = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1, N}} \rangle \cap t^{-\beta_y} r_{1w_j}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} \dots r_{iw_j}^{-1} t^{-\varepsilon'_i} G_\Gamma t^{\varepsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_y} \neq E$$

(E — единичная подгруппа), то $l(w_j u) \geq l(w_j), l(w_j u w_x) \geq l(w_j)$, где $u \in H, w_x \in \{W \cup W^{-1}\}$;

4) пусть $w_i^\varepsilon = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} \dots l_{pw_i} t^{\varepsilon_p} \dots t^{\varepsilon'_i} r_{iw_i} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1w_i} t^{\beta_1}$,

$$w_j^\eta = t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} l_{2w_j} t^{\eta_2} \dots l_{pw_j} t^{\eta_p} \dots t^{\eta'_i} r_{iw_j} \dots t^{\eta'_1} r_{1w_j} t^{\beta_2},$$

где $\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1, \alpha_t = 0, \pm 1, \beta_t = 0, \pm 1, t = 1, 2$ — слова из множества W не обязательно различные, $t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} \dots l_{pw_i} t^{\varepsilon_p}$ — начальное подслово левой половины $w_i^\varepsilon, t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} l_{2w_j} t^{\eta_2} \dots l_{pw_j} t^{\eta_p}$ — начальное подслово левой половины

w_j^η , если $t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} \dots l_{pw_i} \neq t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\eta_1} l_{2w_j} t^{\eta_2} \dots l_{pw_j}$, то не существует слова $w \neq 1$, $l(w) < 2p$, $w \in \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$ такого, что

$$ww_j = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\varepsilon_1} l_{2w_i} t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_{p-1}} l_{pw_i} t^{\eta_p} l_{p+1,w_j} \dots t^{\eta'_i} r_{iw_j} \dots r_{1w_j} t^{\beta_2}.$$

Разобьем множество $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ на подмножества следующим образом: трансформы с одинаковыми крыльями объединим в подмножество M_i , $1 \leq i \leq k$, все нетрансформы из $W = \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ объединим в множество M_0 . Каждое множество M_i , $1 \leq i \leq k$ порождает подгруппу:

$$(M_i) = t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_{1i}} \dots r_{n,i}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,i}} A_i t^{\varepsilon_{n,i}} r_{n,i} \dots r_{1i} t^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i = 0, \pm 1$, $\varepsilon_{i,j} = \pm 1$, A_i — подгруппа группы G_Γ , порожденная ядрами трансформ с крыльями $t^{-\alpha_i} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_{1i}} \dots r_{n,i}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,i}}$. Упорядочиваем множество подгрупп (M_i) по длине крыльев порождающих трансформ:

$$(M_{i_1}) \leq (M_{i_2}) \leq \dots \leq (M_{i_k}). \quad (6)$$

ЛЕММА 5 [1]. Ряд (6) можно преобразовать в ряд (7)

$$(M'_{i_1}) \leq (M'_{i_2}) \leq \dots \leq (M'_{i_k}) \quad (7)$$

со следующими свойствами:

1) $gp((M_0), (M_{i_1}), \dots, (M_{i_k})) = gp((M'_0), (M'_{i_1}), \dots, (M'_{i_k}));$

2) если подгруппе $(M'_j) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,j}} A'_j t^{\varepsilon_{n,j}} r_{n,j} \dots r_{1j} t^{\alpha_j}$, $\alpha_j = 0, \pm 1$ ряда (7) принадлежит трансформ

$$w = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,j}} h t^{\varepsilon_{n,j}} r_{n,j} \dots r_{1j} t^{\alpha_j},$$

где $h \in \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle$, если $t^{\varepsilon_{n,j}} = 1$, или $h \in \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle$, если $t^{\varepsilon_{n,j}} = -1$, то среди подгрупп ряда (7) имеется подгруппа

$$(M'_{i_s}) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n-1,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n-1,j}} A'_{i_s} t^{\varepsilon_{n-1,j}} r_{n-1,j} \dots r_{1j} t^{\alpha_j},$$

содержащая w ;

3) если для некоторой трансформы $w \in (M'_j)$ и некоторой нетрансформы $y \in (M_0)$ при $l(y) = 2m + 1$ (левая закрытая половина y изолирована) и $l(y^{-1}wy) \leq l(y)$, то существует подгруппа (M'_{i_s}) ряда (7), содержащая трансформы $y^{-1}wy$, а при $l(y^\varepsilon w y^{-\varepsilon}) < l(y)$ и $l(y) = 2m + 1$ либо $l(y) = 2m$ существует (M'_{i_s}) из ряда (7), содержащая $y^\varepsilon w y^{-\varepsilon}$;

4) пусть $(M'_j) = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,j}} A'_j t^{\varepsilon_{n,j}} r_{n,j} \dots r_{1j} t^{\alpha_j}$ — подгруппа из ряда (7) и $v = t^{-\alpha_j} r_{1j}^{-1} t^{-\varepsilon_{1j}} \dots r_{n,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n,j}} r_{n+1,j}^{-1} t^{-\varepsilon_{n+1,j}}$ — подслово левой половины w_i^ε , $w_i^\varepsilon \in \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, не являющейся изолированной закрытой левой половиной w_i^ε в специальном множестве $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, тогда, если подгруппе (M'_j) принадлежит трансформ $w \in v^{-1}G_\Gamma v$, то ряду (7) принадлежит подгруппа $(M'_s) = v^{-1}A'_s v$ и $w \in (M'_s)$.

ЛЕММА 6 [1]. Подгруппа M_0 , порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, будем обозначать $gp(M_0, S)$. Она представляет собой HNN -группу с основой S , являющуюся древесным произведением подгрупп ряда (7), правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0 . Подгруппы (M_0) и (M_j) , $j = \overline{1, k}$, из ряда (7) будем называть порождающими подгруппами подгруппы $\langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [1]. Произведение $u_1 \dots u_k$ назовем словом подгруппы $\langle w_1, \dots, w_N \rangle = gp(M_0, S)$ группы \overline{G}_Γ , если:

- 1) $u_i \neq 1$;
- 2) $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$ либо u_i принадлежит некоторой подгруппе из ряда (7);
- 3) $u_i \neq u_{i+1}^{-1}$;
- 4) u_i, u_{i+1} не содержатся в одной подгруппе ряда (7);
- 5) в $u_1 \dots u_k$ нет произведения $u_i u_{i+1} u_{i+2}$ ($i = \overline{1, k-2}$), где $u_i = u_{i+2}^{-1}$, $u_i \in \{M_0 \cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1} \in (M_j)$ и $u_i u_{i+1} u_{i+2} \in (M_s)$, (M_j) , (M_s) — из ряда (7).

ЛЕММА 7 [1]. Всякое произведение $w_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots w_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, где w_{i_j} — образующие подгруппы $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$, через конечное число шагов можно привести к слову $u_{i_1} \dots u_{i_k}$, $k \leq m$, подгруппы $gp(M_0, S) = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [1]. Будем говорить, что между словами v_1 и v_2 имеет место касание первого, второго или третьего рода, если длина произведения $v_1 v_2$ соответственно больше, равна или меньше $\max\{l(v_1), l(v_2)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [1]. Слово $u_1 \dots u_k$ является простым, если $l(u_1 \dots u_k) = \max\{l(u_1), \dots, l(u_k)\}$.

ЛЕММА 8 [1]. Если $u_1 \dots u_n$ — слово подгруппы $gp(M_0, S)$, то $l(u_1 \dots u_n) \geq l(u_i)$, $i = \overline{1, n}$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [1]. Если в слове $u_1 \dots u_n \in gp(M_0, S)$ выполнить сокращения, то в нем сокращение не затронет, по крайней мере, левую половину u_1 .

СЛЕДСТВИЕ 2 [1]. Всякое слово подгруппы $gp(M_0, S)$ может быть представлено в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода.

Из леммы 8 следует, что простое слово $u_1 \dots u_n$ подгруппы $gp(M_0, S)$ может быть одного из следующих видов:

- а) $u_1 \dots u_k$ содержит нетрансформу максимальной длины, то есть $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+1 \leq j \leq k$;

б) слово $u_1 \dots u_k$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины, то есть $l(u_i) = l(u_{i+1}) = l(u_i u_{i+1})$, $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+2 \leq j \leq k$;

с) слово $u_1 \dots u_k$ содержит нетрансформы u_i , u_{i+2} и трансформу u_{i+1} со свойствами $l(u_i) = l(u_{i+2})$, $l(u_i) = l(u_i u_{i+1}) = l(u_i u_{i+1} u_{i+2})$, $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+3 \leq j \leq k$, причем длина слова u_{i+1} может оказаться меньше длины $l(u_i)$;

д) слово $u_1 \dots u_k$ содержит трансформу u_i максимальной длины.

ТЕОРЕМА 5 [1]. Пусть группа

$$G^* = \langle G, t | t^{-1} U_1 t = \phi(U_1) \rangle$$

— HNN-расширение группы G с помощью изоморфных подгрупп U_1 и U_{-1} и фиксированного конструктивного изоморфизма ϕ . Тогда если подгруппы U_1 и U_{-1} обладают условием максимальности и в группе G разрешимы:

- 1) проблема вхождения;
- 2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ с каждой из подгрупп U_1 и U_{-1} ;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G$ с любой из выделенных подгрупп U_1 и U_{-1} ,

то разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы G^* в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.

Имея в виду тот факт, что циклические подгруппы обладают условием максимальности, а также утверждения леммы 1 и леммы 2, можем полагать, что образующие подгруппы группы \overline{G}_Γ можно привести к специальным, порождающим ту же самую подгруппу.

2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 9. Всякое простое слово $w \in \text{gp}(M_0, S)$ группы

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | \text{rel} G_\Gamma, t^{-1} U_1 t = U_{-1} \rangle,$$

$U_1 = \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle$, $U_{-1} = \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle$, имеющее своей несократимой записью трансформу $w = \text{gag}^{-1}$, где $a \in G_\Gamma$, может быть приведено к виду

$$\text{gag}^{-1} = u_1 u_2 \dots u_n u_0 u_n^{-1} \dots u_{2-1} u_1^{-1},$$

где u_0 — трансформа, принадлежащая одной из подгрупп (M_i) , $i = \overline{1, k}$, ряда (7), $u_i \in (M_0)$ либо $u_i \in (M_i)$, ряда (7), $u_1 u_2 \dots u_n u_0 u_n^{-1} \dots u_{2-1} u_1^{-1}$ — слово подгруппы $\text{gp}(M_0, S)$.

Доказательство. Так как $w \in gp(M_0, S)$, перепишем его в u -символах подгруппы $gp(M_0, S)$:

$$gag^{-1} = u_1u_2\dots u_m. \quad (8)$$

По условию слово w простое. Выясним, какой вид будет иметь слово w .

Проведем доказательство для различных случаев строения простого слова $a - d$:

1. Допустим, что слово $w = u_1\dots u_m$ содержит трансформу максимальной длины $u_i = g_iK_i g_i^{-1}$, т.е. w — слово вида d . Доказательство проведем по числу m сомножителей. Для $m = 1$ лемма 9 справедлива. Допустим, что утверждение леммы справедливо, когда число сомножителей в слове (8) меньше m . Докажем для m сомножителей.

Пусть $gag^{-1} = u_1\dots u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_m$.

СЛУЧАЙ 1. Пусть подслова $u_1\dots u_{i-1}$, $u_{i+1}\dots u_m$ не содержат нетрансформ, тогда $l(g_iK_i g_i^{-1}) = l(gag^{-1})$, $l(u_j) < l(g_iK_i g_i^{-1})$; $1 \leq j \leq i-1$, $i+1 \leq j \leq m$, и на основании строения простого слова:

$$l(u_1) < l(u_2) < \dots < l(u_{i-1}), \\ l(u_m) < l(u_{m-1}) < \dots < l(u_{i+1}).$$

Используя свойства порождающих подгрупп $gp(M_0, S)$, можно показать, что $l(u_1) = l(u_m)$, $l(u_2) = l(u_{m-1})$ и трансформы u_1 , u_m содержатся в подгруппе (M_i) ряда (7).

В этом случае трансформу $gag^{-1} = u_1\dots u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_m$ сопрягаем элементом u_m^{-1} :

$$u_m(gag^{-1})u_m^{-1} = u_mu_1u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_mu_m^{-1}.$$

Тогда

$$u_m(gag^{-1})u_m^{-1} = u'_1\dots u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_{m-1},$$

где $u_mu_1 = u'_1$. Слово $u'_1\dots u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_{m-1}$ — простое, длины меньше чем m . Таким образом, по индуктивному предположению лемма доказана.

СЛУЧАЙ 2. Пусть подслова $u_1\dots u_{i-1}$, $u_{i+1}\dots u_m$ простого слова $u_1\dots u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_m$ содержат нетрансформы. Выделим в слове $u_1\dots u_{i-1}$ первую слева, а в слове $u_{i+1}\dots u_m$ первую справа нетрансформу. Пусть это будут соответственно

$$u_j = g'_jK_jg_j, 1 \leq j \leq i-1, u_s = g_sK_sg'_s, i+1 \leq s \leq m,$$

где левая половина g'_j нетрансформы u_j и правая половина g'_s нетрансформы u_s в силу строения простого слова являются изолированными. Можно утверждать, что $u_s = u_j^{-1}$.

Если $s = m$, $j = 1$, то лемма доказана.

Пусть $1 \leq j \leq i-1$ и $i+1 \leq s \leq m$. Тогда

$$gag^{-1} = u_1\dots u_{j-1}u_ju_{j+1}\dots u_{i-1}(g_iK_i g_i^{-1})u_{i+1}\dots u_su_{s+1}\dots u_m,$$

$$l(u_s) > l(u_{s+1}) > \dots > l(u_m),$$

с другой стороны,

$$l(u_j) > l(u_{j-1}) > \dots > l(u_1).$$

Слова $u_{j-1}^{-1} \dots u_1^{-1}$ и $u_{s+1} \dots u_m$ простые, как подслова простого слова. Предположим, что $l(u_s) \leq l(u_j)$.

Сопрягаем трансформу gag^{-1} словом $u_1 \dots u_{j-1}$:

$$g'ag'^{-1} = u_j u_{j+1} \dots u_{i-1} (g_i K_i g_i^{-1}) u_{i+1} \dots u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1},$$

$$l(g'ag'^{-1}) = l(gag^{-1}) = l(u_j \dots u_{i-1} (g_i K_i g_i^{-1}) u_{i+1} \dots u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1})$$

. Отсюда $l(u_s u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1}) = l(u_s)$. Кроме u_s наибольшую длину имеют u_{s+1} и u_{j-1} . При этом $l(u_{s+1}) \geq l(u_{j-1})$ или, наоборот, $l(u_{s+1}) \leq l(u_{j-1})$ и сокращения проходят до ядра минимального.

Таким образом, для произведения $u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1}$ имеем

$$l(u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1}) < l(u_s) = l(u_j).$$

Слово $u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1}$ — простое и $l(u_{s+1} \dots u_m u_1 \dots u_{j-1}) = 1$. В противном случае левую половину u_s можно перевести в правую половину u_j , либо наоборот. Но так как u_s и u_j изолированы — это невозможно. Откуда $u_j = u_s$ и $u_1 \dots u_{j-1} = u_{s+1}^{-1} \dots u_m^{-1}$.

Следовательно, утверждение леммы справедливо для данного случая.

2. Слово w содержит нетрансформы u_{i-1} , u_{i+1} и трансформу u_i со свойствами $l(u_{i-1}) = l(u_{i+1})$, $l(u_{i-1}) = l(u_{i-1}u_i) = l(u_{i-1}u_iu_{i+1})$, $l(u_{i-1}) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-2$, $i+2 \leq j \leq m$ и $l(u_i) \leq l(u_{i-1})$, т.е. w — слово вида c .

Известно, что левая половина нетрансформы $u_{i-1} = u_{i\Lambda} K_{i-1} u_{i\Pi}$ изолирована и правая половина нетрансформы $u_{i+1} = u_{i\Pi}^{-1} K_{i+1} u'_{i\Pi}$ также изолирована. Пусть трансформа $u_i = u_{i\Pi}^{-1} K u_{i\Pi} \in (M_i)$ ряда (7). Тогда

$$gag^{-1} = u_1 \dots u_{i-2} u_{i\Lambda} K_{i-1} u_{i\Pi} u_{i\Pi}^{-1} K u_{i\Pi} u_{i\Pi}^{-1} K_{i+1} u'_{i\Pi} u_{i+2} \dots u_m,$$

$$gag^{-1} = u_1 \dots u_{i-2} u_{i\Lambda} (K_{i-1} K K_{i+1}) u'_{i\Pi} u_{i+2} \dots u_m,$$

Длина начального куска $l(u_1 \dots u_{i-2} u_{i\Lambda})$ меньше $l(u_{i-1})$.

Если $u_{i-1} \neq u_{i+1}^{-1}$, с помощью подслова $u_1 \dots u_{i-2}$ изолированную левую половину $u_{i\Lambda}$ нетрансформы u_{i-1} мы можем перевести в изолированную правую половину $u'_{i\Pi}$ трансформы u_{i+1} . Это невозможно, следовательно, $u_{i+1} = u_{i-1}^{-1}$

Аналогичные рассуждения можно провести для подслов u_{i-2} и u_{i+2} и т.д. Значит, $u_{i+1} u_{i+2} \dots u_m = u_{i-1}^{-1} \dots u_1^{-1}$. В этом случае трансформу gag^{-1} можно привести к виду $u_1 u_2 \dots u_n u_0 u_n^{-1} \dots u_2^{-1} u_1^{-1}$, где u_0 — трансформы, принадлежащая одной из подгрупп (M_j) , $i = 1, k$ ряда (7), $u_i \in (M_0)$

3. Пусть $w = u_1 \dots u_m$ содержит нетрансформу u_i максимальной длины, то есть $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+1 \leq j \leq m$, т.е. w — слово вида b . Так как длина слова gag^{-1} нечетна, то $l(gag^{-1}) = l(u_1 \dots u_m) = l(u_i)$, где $l(u_i)$ — нечетна. Получаем, что сопряжением словом $u_1 \dots u_{i-1}$ левую половину нетрансформы u_i можно перевести в левую половину нетрансформы u_i^{-1} умноженем на слово меньшей длины, т.к. $l(u_{i+1} \dots u_m u_1 \dots u_{i-1}) < l(u_i)$. Что невозможно по определению специального множества.

4. Слово $w = u_1 \dots u_m$ содержит нетрансформу u_i и трансформу u_{i+1} максимальной длины, то есть $l(u_i) = l(u_{i+1}) = l(u_i u_{i+1})$, $l(u_i) > l(u_j)$, $1 \leq j \leq i-1$, $i+2 \leq j \leq m$, т.е. w — слово вида a . По аналогичным рассуждениям этот случай невозможен.

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть H — конечно порожденная подгруппа группы \overline{G}_Γ , порожденная двумя различными специальными множествами, то есть различными в общем случае системами порождающих подгруппу: $H = \text{gr}(M_0, S)$ и $H = \text{gr}(M'_0, S')$, где S — подгруппа, порожденная подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_k); \quad (9)$$

S' — подгруппа, порожденная подгруппами ряда

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \dots \leq (M'_k); \quad (10)$$

$(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$, $(M'_j) = g_j^{-1} C_j g_j$, где каждая из подгрупп C_i и C_j принадлежит G_Γ .

Тогда для каждой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ ряда (9) существует (M'_j) из (10) и слово $w_{ij} \in H$ такое, что $(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1} (M'_j) w_{ij}$.

Доказательство. Если подгруппа (M_i) из ряда (9) содержит трансформы с крыльями единичной длины, то некоторая подгруппа (M'_j) ряда (10) также содержит трансформы единичной длины, и тогда слово $w_{ij} = 1$. Пусть $v_i^{-1} K_1 v_i, v_i^{-1} K_2 v_i, \dots, v_i^{-1} K_m v_i$ — образующие некоторой подгруппы $(M_i) = v_i^{-1} A_i v_i$ из ряда (9), где $v_i^{-1} = t^{-\alpha} r_{1i}^{-1} t^{-\varepsilon_1} r_{2i}^{-1} t^{-\varepsilon_2} \dots r_{ki}^{-1} t^{-\varepsilon_k}$

— левая половина трансформ подгруппы (M_i) . Можно полагать, что среди элементов $v_i^{-1} K_j v_i$ существует такой, что ядро K_j не сопряжено объединяемой подгруппе. Так как $v_i^{-1} K_j v_i \in \text{gr}(M'_0, S'_1)$, то на основании леммы 9

$$v_i^{-1} K_j v_i = u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} u_{nj} \dots u_{1j}, \quad (11)$$

где $1 \leq j \leq m$, $u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} u_{nj} \dots u_{1j}$ — простое слово, u_{0j} — трансформ, принадлежащая некоторой подгруппе (M'_s) ряда (10). Покажем, что для любого j трансформы u_{0j} принадлежат одной подгруппе (M'_s) ряда (10). Пусть $v_i^{-1} K_{j_1} v_i = u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} u_{0j_1} u_{nj_1} \dots u_{1j_1}$ слово вида c , а слово $v_i^{-1} K_{j_2} v_i = u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1} u_{0j_2} u_{nj_2} \dots u_{1j_2}$ — слово вида d . Тогда $l(u_{n,j_1}) > l(u_{s,j_1})$, где $s \neq n$, $l(u_{0,j_1}) \leq l(u_{n,j_1})$, u_{n,j_1} — нетрансформа с изолированной закрытой

правой половиной, $l(u_{1j_1}^{-1} \dots u_{n-1,j_1}^{-1}) < l(u_{nj_1}^{-1})$. Трансформа u_{0j_2} удовлетворяет условию: $l(u_{0j_2}) > l(u_{s,j_2})$ при $s \neq 0$, $l(u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}) < l(u_{0j_2})$, и так как подслова $u_{1j_1}^{-1} \dots u_{n-1,j_1}^{-1}$ и $u_{1j_2}^{-1} \dots u_{nj_2}^{-1}$ одновременно принадлежат подгруппе $gp(M_0, S_1)$ и имеют длину меньше $2k_i + 1$, то после сопряжения этими элементами трансформ $v_i^{-1}K_j v_i$ их длина не изменится. Поэтому изолированную закрытую левую половины u_{n,j_1} умножением можно перевести в закрытую левую половину u_{0j_2} , что противоречит определению специального множества. Предположим, что все слова вида (11) — слова вида c . Тогда в силу строения простого слова $u_{s,j_1} = u_{s,j_2}$ для $s = \overline{1, n}$. Трансформы u_{0j} принадлежат некоторым подгруппам (M'_j) ряда (10), причем если $u_{nj} = g'^{-1}K_j g''$, где g'^{-1} - неизолированная левая половина, то $(M'_s) = g'^{-1}A_s g'$. Каждое слово $u_{1j_s}^{-1} \dots u_{n-1,j_s}^{-1} u_{nj_s}^{-1} = v_i^{-1}K'_s g'$. Поэтому, сопрягая левую и правую половину равенства (11) словом $u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}$, получим

$$u_{1j_1} \dots u_{nj_1} (v_i^{-1}K_j v_i) u_{nj_1}^{-1} \dots u_{1j_1}^{-1} = g'^{-1} \tilde{K}_j g', 1 \leq j \leq m,$$

$$g'^{-1} \tilde{K}_j g' = u_{0j_1},$$

$$g'^{-1} \tilde{K}_j g' = u_{nj_1} \dots u_{1j_1} u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} u_{0j_s} u_{1j_s} u_{2j_s} \dots u_{nj_s} u_{nj_1}^{-1} \dots u_{1j_1}^{-1},$$

$1 \leq j \leq m$, $u_{nj_1} \dots u_{1j_1} u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} = g'^{-1}K''_s g'$, где $g'^{-1}K''_s g' \in (M'_s)$. Отсюда $u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1} = u_{1j_1}^{-1} u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} (g'^{-1}K''_s g')$. В результате, используя полученные равенства и заменяя в равенствах (11) подслова $u_{1j_s}^{-1} u_{2j_s}^{-1} \dots u_{nj_s}^{-1}$ соответственно равным словом $u_{1j_1}^{-1} u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} (g'^{-1}K''_s g')$, получим $v_i^{-1}K_s v_i = u_{1j_1}^{-1} u_{2j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1} u'_{0j_s} u_{1j_1} u_{2j_1} \dots u_{nj_1}$, где $u'_{0j_s} = (g'^{-1}K''_s g_1) u'_{0j_s} (g_1^{-1}(K''_s)^{-1} g') \in (M'_s)$. Пусть все слова (11) являются словами вида d . Тогда $l(u_{1j_1}^{-1} \dots u_{nj_1}^{-1}) < l(u_{0j})$ для $1 \leq j \leq m$, и допустим, что трансформа u_{0j} имеет вид

$$u_{0j} = t^{-\alpha} r_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} \dots r_{k_i}^{-1} t^{-\varepsilon_{k_i}} K_j t^{\varepsilon_{k_i}} r_{k_i} \dots t^{\varepsilon_1} r_1 t^{\alpha}.$$

Рассмотрим произведение:

$$u_{01} u_{n_1} \dots u_{11} u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j},$$

$1 \leq j \leq m$. Так как в словах $u_{01} u_{n_1} \dots u_{11}$ и $u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j}$ максимальные длины имеют u_{01} и u_{0j} соответственно, причем $l(u_{01}) = l(u_{0j})$, то $u_{01} u_{n_1} \dots u_{11} u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} u_{0j} = t^{-\alpha} r_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} \dots r_{k_i}^{-1} t^{-\varepsilon_{k_i}} h_j t^{\varepsilon_{k_i}} r_{k_i} \dots t^{\varepsilon_1} r_1 t^{\alpha}$, где h_j принадлежит ассоциированной подгруппе, тогда $u_{1j}^{-1} \dots u_{nj}^{-1} = u_{11}^{-1} \dots u_{n_1}^{-1} u'_{0j}$, где $u'_{0j} \in (M'_s)$, $l(u'_{0j}) < 2k_i + 1$. Но тогда трансформы $v_i^{-1}K_1 v_i$ и $v_i^{-1}K_j v_i$ примут следующий вид:

$$v_i^{-1}K_1 v_i = u_{11}^{-1} u_{21}^{-1} \dots u_{n_1}^{-1} u_{01} u_{n_1} u_{n-1} \dots u_{11},$$

$$v_i^{-1}K_j v_i = u_{11}^{-1} u_{21}^{-1} \dots u_{n_1}^{-1} u''_{0j} u_{n_1} u_{n-1} \dots u_{11},$$

где $1 \leq j \leq m$, $u''_{0j} = u'_{0j} u_{0j} (u'_{0j})^{-1} \in (M'_s)$.

Таким образом, мы показали, что для каждой подгруппы (M_i) ряда (9) существует подгруппа ряда (10) и слова $w_{ij} \in H$ такие, что $(M_i) \subseteq \subseteq w_{ij}^{-1} (M'_j) w_{ij}$.

ЛЕММА 11. Пусть группа H порождена двумя различными специальными множествами $H = \text{gr}(M_0, S)$ и $H = \text{gr}(M'_0, S')$, где S — древесное произведение подгрупп ряда (9), а S' — древесное произведение подгрупп ряда (10). Тогда существует подгруппа $(M_i) = v_i^{-1} C_i v_i$ из ряда (9), существует (M'_j) из ряда (10) и слово $w_{ij} \in H$ такое, что $(M_i) = w_{ij}^{-1} (M'_j) w_{ij}$.

Доказательство. Для каждой подгруппы (M_i) ряда (9) на основании леммы 10 существует подгруппа ряда (10) и слова $w_{ij} \in H$, удовлетворяющие условию

$$(M_i) \subseteq w_{ij}^{-1} (M'_j) w_{ij}. \quad (12)$$

Аналогично для подгрупп ряда (10):

$$(M'_j) \subseteq w_{ji}^{-1} (M_i) w_{ji}. \quad (13)$$

С помощью соотношений (12) и (13) можно построить цепочку вложенных подгрупп, имеющих наименьшую длину:

$$w_1^{-1} (M_{p_1}) w_1 \subseteq w_1^{-1} (M'_{q_1}) w_1 \subseteq w_2^{-1} (M_{p_2}) w_2 \subseteq \dots \subseteq w_k^{-1} (M'_{q_k}) w_k \subseteq (M_{p_1}),$$

где $w_i, w'_i \in H$, (M_{p_j}) — подгруппа ряда (9), (M'_{q_j}) — подгруппа ряда (10). Следовательно, $w_1^{-1} (M_{p_1}) w_1 \subseteq (M_{p_1})$.

Подгруппа $(M_{p_1}) = v_{p_1}^{-1} C_{p_1} v_{p_1}$ — бесконечна. Тогда возможны следующие варианты:

1. Если подгруппа C_{p_1} не сопряжена объединяемой подгруппе, то (M_{p_1}) содержит трансформу $v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}$, в которой ядро K не сопряжено ни одному элементу из ассоциированной подгруппы. Так как слово w_1 из H , его можно записать в u -символах $w_1^{-1} = u_1^{-1} \dots u_n^{-1}$. Тогда

$$u_1^{-1} \dots u_n^{-1} (v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}) u_n \dots u_1 = v_{p_1}^{-1} K_1 v_{p_1}$$

и слово $u_1^{-1} \dots u_n^{-1} (v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}) u_n \dots u_1$ — простое, в котором все u_i удовлетворяют условию $l(u_1) \leq \dots \leq l(u_n) \leq 2l(v_{p_1}) + 1$.

Рассмотрим произведение

$$u_1^{-1} \dots u_n^{-1} (v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}) u_n \dots u_1 (v_{p_1}^{-1} K_1^{-1} v_{p_1}) = 1.$$

Если допустить, что $u_1 \notin (M_{p_1})$, тогда $u_1^{-1} \dots u_n^{-1} (v_{p_1}^{-1} K v_{p_1}) u_n \dots u_1 (v_{p_1}^{-1} K_1^{-1} v_{p_1})$ является словом в подгруппе H и поэтому не равно 1. Значит $u_1 \in (M_{p_1})$. Аналогично все $u_i \in (M_{p_1})$, отсюда $w_1^{-1} (M_{p_1}) w_1 = (M_{p_1})$ и, следовательно, в этом случае в соотношении (12) знак \subseteq можно заменить на равенство.

2. Если подгруппа C_{p_1} сопряжена объединяемой подгруппе, тогда сопряжением ее можно привести к подгруппе C'_{p_1} , которая не сопряжена объединяемой подгруппе. Получаем случай 1.

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M'_0, S')$ — две конечно порожденные подгруппы группы \overline{G}_Γ . Основа S подгруппы H_1 порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_{k_1}), \quad (14)$$

основа S' подгруппы H_2 порождена подгруппами ряда

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \dots \leq (M'_{k_2}). \quad (15)$$

Тогда если H_1 и H_2 сопряжены в \overline{G}_Γ , то есть существует $z \in \overline{G}_\Gamma$ такой что $z^{-1}H_1z = H_2$, то существуют $w \in gp(M'_0, S')$, $j = \overline{1, k_1}$, $s = \overline{1, k_2}$ такие, что $w^{-1}z^{-1}(M_j)zw = (M'_s)$, где (M_j) — подгруппа ряда (14), (M'_s) — подгруппа ряда (15).

Доказательство. По условию леммы подгруппы $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M'_0, S')$ сопряжены, тогда существует $z \in \overline{G}_\Gamma$ такое, что $z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M'_0, S')$. Приведем образующие подгруппы $z^{-1}gp(M_0, S)z$ к образующим специального множества, получим:

$$z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M''_0, S''),$$

где S'' порождена подгруппами ряда $(M''_1) \leq (M''_2) \leq \dots \leq (M''_{k_3})$.

Сопряжем подгруппу $gp(M''_0, S'')$ элементом z^{-1} : $gp(M_0, S) = zgp(M''_0, S'')z^{-1}$. Преобразуем множество $zgp(M''_0, S'')z^{-1}$ в специальное множество. Через конечное число шагов получим, что

$$zgp(M''_0, S'')z^{-1} = gp(M'''_0, S'''),$$

где S''' порождена подгруппами ряда $(M'''_1) \leq (M'''_2) \leq \dots \leq (M'''_{k_4})$.

Таким образом, для подгрупп рядов имеет место следующее соотношение:

$$\underline{w}_{ij}^{-1}z^{-1}(M_{i_1})z\underline{w}_{ij} \subseteq (M''_j),$$

$\underline{w}_{ij} \in z^{-1}gp(M_0, S)z = gp(M''_0, S'')$, поэтому $\underline{w}_{ij} = z^{-1}w_{ij}z$, $w_{ij} \in gp(M_0, S)$.

С другой стороны, каждая подгруппа (M''_j) сопряжена некоторой подгруппой из (M'''_s) , то есть $w'^{-1}_{js}z(M''_j)z^{-1}w'_{js} \subseteq (M'''_s)$, где $w'_{js} \in gp(M_0, S)$. Поэтому имеем:

$$w'^{-1}_{js}z\underline{w}'^{-1}_{ij}z^{-1}(M_i)z\underline{w}'_{ij}z^{-1}w'_{js} \subseteq w'^{-1}_{js}z(M''_j)z^{-1}w'_{js} \subseteq (M'''_s), \quad (16)$$

где приведение $w'^{-1}_{js}z\underline{w}'^{-1}_{ij}z^{-1} = w'^{-1}_{js}z(z^{-1}w_{ij}^{-1}z)z^{-1} = w'^{-1}_{js}w_{ij}^{-1} \in gp(M_0, S)$.

Учитывая теперь, что $gp(M'_0, S') = gp(M''_0, S'')$ и $gp(M'''_0, S'''_1) = gp(M_0, S_1)$, можно расширить цепочки вида (16). В результате для каждой подгруппы (M_i) будем иметь:

$$\begin{aligned} w_s^{-1} z \underline{w}'_{ij} z^{-1} (M_i) z \underline{w}'_{ij} z^{-1} w_s &\subseteq w_s^{-1} z \underline{w}'_{jr} (M'_j) \underline{w}'_{jr} z^{-1} w_s \subseteq \\ &\subseteq w_s^{-1} z \underline{w}_{rp} (M'_r) \underline{w}_{rp} z^{-1} w_s \subseteq w_p^{-1} z (M''_p) z^{-1} w_p \subseteq w_s^{-1} (M'''_i) w_s \subseteq (M_s), \end{aligned}$$

где $w_s^{-1} z \underline{w}'_{ij} z^{-1} \in gp(M_0, S)$ и $i = \overline{1, k}$.

Используя полученные ранее цепочки, можно построить цепочку минимальной длины следующего вида:

$$\begin{aligned} w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_1 z^{-1} (M_{p_1}) z \underline{w}_1 z^{-1} w_{p_1} &\subseteq w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_2 (M''_{t_2}) \underline{w}_2 z^{-1} w_{p_1} \subseteq \\ &\subseteq w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_3 (M'_{j_3}) \underline{w}_3 z^{-1} w_{p_1} \subseteq \dots \subseteq (M_{p_1}), \end{aligned}$$

из которой следует, что $w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_1 z^{-1} (M_{p_1}) z \underline{w}_1 z^{-1} w_{p_1} \subseteq (M_{p_1})$, и так как $w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_1 z^{-1} \in gp(M_0, S)$, то, используя лемму 11, можно показать, что $w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_1 z^{-1}$ есть трансформация из (M_{p_1}) . Поэтому имеет место равенство $w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_1 z^{-1} (M_{p_1}) z \underline{w}_1 z^{-1} w_{p_1} = (M_{p_1})$.

В результате получаем:

$$w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_1 z^{-1} (M_{p_1}) z \underline{w}_1 z^{-1} w_{p_1} = w_{p_1}^{-1} z \underline{w}_3 (M'_{j_3}) \underline{w}_3 z^{-1} w_{p_1},$$

откуда $\underline{w}_1 z^{-1} (M_{p_1}) z \underline{w}_1 = \underline{w}_3 (M'_{j_3}) \underline{w}_3$, где $\underline{w}_1, \underline{w}_3 \in gp(M'_0, S')$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 13 [6]. Лемма Коллинза. Пусть $G^* = \langle G, t; t^{-1}At = B, \phi \rangle$ — некоторое HNN-расширение. Пусть $u = g_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n}$ и v — сопряженные циклически приведенные элементы из G^* . Тогда длины $l(u) = l(v)$ и элемент u можно получить из v , беря подходящую циклическую перестановку элемента v , оканчивающуюся на t^{ε_n} , и сопрягая затем элементом $z \in A$, если $\varepsilon_n = -1$, и $z \in B$, если $\varepsilon_n = 1$.

3. Доказательство основной теоремы

Докажем, что в группе

$$\overline{G}_\Gamma = \langle G_\Gamma, t | \text{rel } G_\Gamma, t^{-1}U_1 t = U_{-1} \rangle,$$

$U_1 = \langle a_{i_0}^{s_{ij}} \rangle, U_{-1} = \langle a_{j_0}^{k_{ji}} \rangle, |s_{ij}|, |k_{ji}| \geq 1, i, j = \overline{1, n}$, разрешима проблема сопряженности подгрупп.

Пусть $H_1 = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда

$$(M_1) \leq (M_2) \leq \dots \leq (M_{k_1}), \quad (17)$$

$H_2 = gp(M'_0, S')$, где S' порождена подгруппами ряда

$$(M'_1) \leq (M'_2) \leq \dots \leq (M'_{k_2}). \quad (18)$$

Среди подгрупп (17) существует подгруппа $(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$, среди подгрупп (18) существует подгруппа $(M'_{j_0}) = g_{j_0}^{-1}C'_{j_0}g_{j_0}$, где каждая из подгрупп C_{i_0}, C'_{j_0} является подгруппами G_Γ . В соответствии с леммой 12 существует элемент $w \in gp(M'_0, S')$, такой что

$$w^{-1}z^{-1}(M_{i_0})zw = (M'_{j_0}). \quad (19)$$

I. Пусть каждая подгруппа C_{i_0}, C'_{j_0} не сопряжена с ассоциированной подгруппой $U_\varepsilon; \varepsilon = \pm 1$.

Подставив соотношения $(M'_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$, $(M'_{j_0}) = g_{j_0}^{-1}C'_{j_0}g_{j_0}$ в (19), получаем $(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1})C_{i_0}(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}) = C'_{j_0}$, в котором $v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1} = a_0 \in G_\Gamma$.

Можно записать:

$$(g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1})(gp(v_{i_0}M_0v_{i_0}^{-1}, v_{i_0}Sv_{i_0}^{-1}))(v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}) = gp(g_{j_0}M'_0g_{j_0}^{-1}, g_{j_0}S'g_{j_0}^{-1}).$$

Приведем образующие подгрупп $gp(v_{i_0}M_0v_{i_0}^{-1}, v_{i_0}Sv_{i_0}^{-1})$ и

$$gp(g_{j_0}M'_0g_{j_0}^{-1}, g_{j_0}S'g_{j_0}^{-1})$$

к специальным образующим:

$$gp(v_{i_0}M_0v_{i_0}^{-1}, v_{i_0}Sv_{i_0}^{-1}) = gp(M''_0, S'''), gp(g_{j_0}M'_0g_{j_0}^{-1}, g_{j_0}S'g_{j_0}^{-1}) = gp(M''_0, S''),$$

где S'' порождена подгруппами ряда $(M''_1) \leq (M''_2) \leq \dots \leq (M''_{k_2})$, S''' порождена подгруппами ряда $(M'''_1) \leq (M'''_2) \leq \dots \leq (M'''_{k_2})$. Тогда

$$a_0^{-1}gp(M''_0, S''')a_0 = gp(M''_0, S''). \quad (20)$$

Выберем в подгруппе $gp(M''_0, S''')$ произвольный образующий $X = B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots t^{\varepsilon_k}B_k$, $k > 1$. Из соотношения (20) следует, что

$$a_0^{-1}B_0t^{\varepsilon_1}B_1\dots t^{\varepsilon_k}B_ka_0 \in gp(M''_0, S'').$$

Тогда слово $a_0^{-1}Xa_0$ можно переписать в другой системе образующих: $a_0^{-1}Xa_0 = u_0u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_t}$, где $u_0u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_t}$ — слово подгруппы $gp(M''_0, S'')$, $u_0 \in (M''_1) = C'_{j_0}$.

Пусть $u_{i_1} = l_1t^{\mu_1}u_{1n}$, тогда $a_0^{-1}B_0 = u_0l_1h$, $h \in U_\varepsilon; \varepsilon = \pm 1$, т.е. $h = a_{i_0}^{Xs_{ij}}$, если $\mu_1 = 1$, или $h = a_{j_0}^{Xk_{ji}}$, если $\mu_1 = -1$. Причем h можно ограничить, так как a_{i_0} и a_{j_0} являются образующими группы G_Γ , которая имеет центр $C(G_\Gamma) = a_{i_0}^{M_{i_0}}$. Тогда $Xk_{ji} < M_{i_0}$ и $Xs_{ij} < M_{i_0}$.

Таким образом:

$$a_0^{-1} = u_0l_1hB_0^{-1}$$

и в качестве a_0^{-1} можно взять $a_0^{-1} = l_1hB_0^{-1}$, так как $u_0 \in C'_{j_0}$. Множество элементов такого вида обозначим T . Множество T конечно и, построив его,

мы проверим эффективно существует ли a_0 такой, что $z^{-1} = wg_{j_0}^{-1}a_0v_{i_0}$, а так как $w \in H_2$, то в качестве z^{-1} можно взять

$$z^{-1} = g_{j_0}^{-1}a_0v_{i_0}. \quad (21)$$

Если ни для одного a_0 из T не выполняется условие $z^{-1}H_1z = H_2$, то подгруппу (M'_{j_0}) заменяем другой подгруппой (M'_{j_1}) , сопряженной подгруппе (M_{i_0}) и повторяем алгоритм для данной пары подгрупп.

II. Каждая подгруппа (M_{ij}) ряда (17) сопряжена с ассоциированной подгруппой. Аналогичному условию удовлетворяет каждая подгруппа ряда (18). В противном случае подгруппы H_1 и H_2 не сопряжены.

На основании леммы 12 из сопряженности подгрупп H_1 и H_2 : $z^{-1}H_1z = H_2$, следует существование подгруппы $(M_{i_0}) = v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0}$ ряда (17), $(M'_{j_0}) = g_{j_0}^{-1}C'_{j_0}g_{j_0}$ ряда (18) и элемента $w \in gp(M'_0, S')$, таких что

$$w^{-1}z^{-1}(v_{i_0}^{-1}C_{i_0}v_{i_0})zw = g_{j_0}^{-1}C'_{j_0}g_{j_0}. \quad (22)$$

Пусть $C_{i_0} = C_1^{-1}\langle a_{i_0}^{s_{ij}\mu_{i_0}} \rangle C_1$, $C'_{j_0} = C_2^{-1}\langle a_{j_0}^{k_{ji}\mu_{j_0}} \rangle C_2$, где $\langle a_{i_0}^{s_{ij}\mu_{i_0}} \rangle < U_1$, $\langle a_{j_0}^{k_{ji}\mu_{j_0}} \rangle < U_{-1}$.

Тогда соотношение (22) приведем к виду

$$(C_2g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}C_1^{-1})\langle a_{i_0}^{s_{ij}\mu_{i_0}} \rangle(C_1v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}C_2^{-1}) = \langle a_{j_0}^{k_{ji}\mu_{j_0}} \rangle. \quad (23)$$

Из соотношения (23) имеем:

$$\tilde{w}^{-1} = C_2g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}C_1^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k, \alpha = 0, \pm 1, k > 1. \quad (24)$$

Преобразуем образующие подгруппы $w^{-1}z^{-1}gp(M_0, S)zw$ в подгруппу $gp(M'_0, S')$:

$$\begin{aligned} (C_2g_{j_0}w^{-1}z^{-1}v_{i_0}^{-1}C_1^{-1})C_1v_{i_0}gp(M_0, S)v_{i_0}^{-1}C_1^{-1}(C_1v_{i_0}zwg_{j_0}^{-1}C_2^{-1}) = \\ = C_2g_{j_0}gp(M'_0, S')g_{j_0}^{-1}C_2^{-1}. \end{aligned}$$

Приведем образующие подгрупп

$$C_1v_{i_0}gp(M_0, S_1)v_{i_0}^{-1}C_1^{-1}, \quad C_2g_{j_0}gp(M'_0, S'_1)g_{j_0}^{-1}C_2^{-1}$$

к специальным образующим:

$$\begin{aligned} C_2g_{j_0}gp(M'_0, S')g_{j_0}^{-1}C_2^{-1} &= gp(M''_0, S''), \\ C_1v_{i_0}gp(M_0, S)v_{i_0}^{-1}C_1^{-1} &= gp(M'''_0, S'''), \end{aligned}$$

где основа S'' порождена подгруппами ряда

$$(M''_1) \leq (M''_2) \leq \dots \leq (M''_{k_3}), \quad (25)$$

основа S''' порождена подгруппами ряда

$$(M'''_1) \leq (M'''_2) \leq \dots \leq (M'''_{k_4}). \quad (26)$$

Причем имеем $(M_1''') = \langle a_{i_0}^{s_{ij}\mu_{i_0}} \rangle$ либо $(M_1'') = \langle a_{j_0}^{k_{ji}\mu_{j_0}} \rangle$. Слово \tilde{w} , удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{-1} \langle a_{i_0}^{s_{ij}\mu_{i_0}} \rangle \tilde{w} &= \langle a_{j_0}^{k_{ji}\mu_{j_0}} \rangle, \\ \tilde{w}^{-1} gp(M_0''', S''') \tilde{w} &= gp(M_0'', S''), \end{aligned}$$

выбираем наименьшим в двойном классе смежности $gp(M_0''', S''') \tilde{w} gp(M_0'', S'')$.

Пусть $W_1 = \{w_{i_1}\}_{i_1=\overline{1,N}}$ — специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0''', S''')$, $W_2 = \{w_{i_2}\}_{i_2=\overline{1,N}}$ — специальное множество образующих подгрупп $gp(M_0'', S'')$, причем $l_1 = \max\{l(w_{11}), l(w_{21}), \dots, l(w_{N_1,1})\}$, $l_2 = \max\{l(w_{12}), l(w_{22}), \dots, l(w_{N_2,2})\}$.

Па. Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S'')$ и $gp(M_0''', S''')$ $M_0'' \neq \emptyset, M_0''' \neq \emptyset$.

Теперь укажем способ построения слова $\tilde{w}^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$, сопрягающего подгруппы $gp(M_0''', S''')$ и $gp(M_0'', S'')$. Выделяем в $\tilde{w}^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$ максимально возможное подслово, совпадающее с подсловом правой половины некоторого образующего специального множества. Допустим, что слово \tilde{w}^{-1} можно умножить на слово $u_0 u_1 \dots u_p \in gp(M_0''', S''')$, $l(u_0 u_1 \dots u_p) < 2j, j < k$, чтобы длина произведения $l(\tilde{w}^{-1} u_0 u_1 \dots u_p) < l(\tilde{w}^{-1})$ и длину $\tilde{w}' = \tilde{w}^{-1} u_0 u_1 \dots u_p$ нельзя больше уменьшить, умножая слева на слова из подгруппы $gp(M_0'', S'')$.

Пусть $\tilde{w}' = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_i} B_i' t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta$, где $t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta$, — максимальное закрытое конечное подслово правой половины некоторого слова

$$t^\alpha l_1 t^{\varepsilon'_1} l_2 \dots l_n t^{\varepsilon'_n} K t^{\varepsilon_n} r_n \dots t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta,$$

являющегося нетрансформой либо трансформой, принадлежащей некоторой порождающей подгруппе ряда (26):

$$(M_i''') = t^{-\beta} r_1^{-1} \dots r_n^{-1} t^{-\varepsilon_n} A_i t^{\varepsilon_n} r_n \dots t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta.$$

Длина начального отрезка $t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$, $i \leq k$ слова \tilde{w}' не больше $[\frac{l_2}{2}]$. Тогда берем в подгруппе $gp(M_0''', S''')$ любой образующий w_{i_1} из специального множества $W_1, l(w_{i_1}) > 2j + 1$,

$$w_{i_1} = t^{\alpha'} l_{1w_{i_1}} t^{\varepsilon'_1} l_{2w_{i_1}} \dots l_{n_{i_1}, w_{i_1}} t^{\varepsilon'_{n_i}} K_{w_{i_1}} t^{\varepsilon''_{n_i}} r_{n_{i_1}, w_{i_1}} \dots t^{\varepsilon''_1} r_{1, w_{i_1}} t^\eta$$

, и рассмотрим

$$\tilde{w}' w_{i_1} \tilde{w}'^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots B_{i-1} t^{\varepsilon_i} B'' t^{\eta_1} X t^{\eta_2} B''' t^{-\varepsilon_i} B_{i-1}^{-1} \dots B_0^{-1} t^{-\alpha}.$$

Подслово $t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ не затрагивается сокращением, так как в противном случае оно не является максимально возможным. Слово $t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots B_{i-1} t^{\varepsilon_i} B'' t^{\eta_1} X t^{\eta_2} B''' t^{-\varepsilon_i} B_{i-1}^{-1} \dots B_0^{-1} t^{-\alpha}$ принадлежит подгруппе $gp(M_0'', S'')$, и если $i - 1 > [\frac{l_2}{2}]$, то длину \tilde{w}^{-1} можно укоротить умножая слева на слово $w \in gp(M_0'', S'')$.

Теперь покажем, что, сопрягая любой $w_{i_2} \in W_2$ элементом \tilde{w}'^{-1} , получим сокращение в произведении $\tilde{w}'^{-1}\tilde{w}_{i_2}\tilde{w}$; слева и справа, затрагивающее слог B'_i . Допустим противное, то есть либо слева, либо справа слог B'_i не затрагивается сокращением. Тогда $\tilde{w}'^{-1}\tilde{w}_{i_2}^{-\varepsilon}\tilde{w}' = Xt^{\varepsilon_i}B'_i t^{\varepsilon_j}r_j t^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1 t^\beta$ и так как $\tilde{w}'^{-1}\tilde{w}_{i_2}^{-\varepsilon}\tilde{w}' \in gp(M_0''', S''')$, то $\tilde{w}'^{-1}\tilde{w}_{i_2}^{-\varepsilon}\tilde{w}' = u_0 u_1 \dots u_n$ и поскольку \tilde{w}' нельзя укоротить, умножая справа на слова из $gp(M_0''', S''')$, то конечное подслово $Xt^{\varepsilon_i}B'_i t^{\varepsilon_j}r_j t^{\varepsilon_{j-1}}r_{j-1}\dots r_1 t^\beta$ можно перевести в конечное подслово правой половины некоторого $\tilde{w}_{j_1}^{-\varepsilon}$, где $\tilde{w}_{j_1}^{-\varepsilon} \in W_2$, что невозможно по определению \tilde{w}' .

По этой причине длина любой нетрансформы в W_2 будет больше $2(i-1)$ и для любой подгруппы $(M''_{i_j}) = g''_{i_j}{}^{-1}C''_{i_j}g''_{i_j}$ с длиной $l(g''_{i_j}) < (i-1)$ и $g''_{i_j} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots B_{t-1} t^{\varepsilon_t}$, $t < (i-1)$ имеем, что

$$t^{-\varepsilon_i} B_{i-1}^{-1} \dots t^{-\varepsilon_{t+1}} B_t^{-1} C''_{i_j} B_t t^{\varepsilon_{t+1}} \dots B_{i-1} t^{\varepsilon_i}$$

принадлежит ассоциированной подгруппе. Поэтому сопрягая одновременно правую и левую части равенства

$$t^\alpha B_0 \dots t^{\varepsilon_i} B'_i t^{\varepsilon_j} \dots r_1 t^\beta gp(M_0''', S''') t^{-\beta} r_1^{-1} \dots t^{-\varepsilon_j} B_i^{-1} t^{-\varepsilon_i} \dots B_0^{-1} t^{-\alpha} = gp(M_0'', S'')$$

словом $t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$, получим

$$\begin{aligned} B'_i (t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta gp(M_0''', S''') t^{-\beta} r_1^{-1} \dots r_{j-1}^{-1} t^{-\varepsilon_{j-1}} r_j^{-1} t^{-\varepsilon_j}) B_i^{-1} = \\ = t^{-\varepsilon_i} \dots t^{-\varepsilon_1} B_0^{-1} t^{-\alpha} gp(M_0'', S_1'') t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

Приводим подгруппу

$$t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta gp(M_0''', S''') t^{-\beta} r_1^{-1} \dots r_{j-1}^{-1} t^{-\varepsilon_{j-1}} r_j^{-1} t^{-\varepsilon_j}$$

к виду $gp(M_0^{(4)}, S^{(4)})$, а подгруппу $t^{-\varepsilon_i} \dots t^{-\varepsilon_1} B_0^{-1} t^{-\alpha} gp(M_0'', S'') t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ к виду $gp(M_0^{(5)}, S^{(5)})$. Последние подгруппы порождены специальными множествами образующих и удовлетворяют равенству

$$B'_i gp(M_0^{(4)}, S^{(4)}) B_i^{-1} = gp(M_0^{(5)}, S^{(5)}),$$

где для определения B'_i поступим следующим образом: выберем в подгруппе $gp(M_0^{(4)}, S^{(4)})$ любой образующий $X = B_0' t^{\eta_1} B_1' \dots t^{\eta_k} B_k'$, где $k > 1$. Тогда $B'_i X B_i^{-1} = B'_i B_0' t^{\eta_1} B_1' \dots t^{\eta_k} B_k' B_i^{-1} \in gp(M_0^{(5)}, S^{(5)})$ и, следовательно, его можно переписать в другой системе образующих: $B'_i X B_i^{-1} = u_0 u_1 \dots u_m$, где $u_0 u_1 \dots u_m$ слово подгруппы $gp(M_0^{(5)}, S^{(5)})$, причем u_0 трансформы длины 1, если среди подгрупп порождающих $S^{(5)}$ содержится подгруппа $(M_1^{(5)}) = C_1 \subset \subset G_\Gamma$, в противном случае $l(u_0) \neq 1$. Пусть $u_1 = l_{1_{u_1}} u_{1_n}$, тогда $B'_i B_1' = u_0 l_{1_{u_1}} h$, где $h \in U_\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$: $h = a_{i_0}^{X s_{ij}}$ и $X s_{ij}$ ограничено, как в случае 1. Получаем $B'_i = u_0 l_{1_{u_1}} h B_1'^{-1}$, где $u_0 \in gp(M_0^{(5)}, S^{(5)})$, из чего следует, что в качестве B'_i

можно взять $l_{1_{u_1}} h B_1'^{-1}$. Возможен случай также, что $B_i' = 1$. Таким образом, выбор B_i' делается, как указано в случае 1.

Остается указать способ построения $w' = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_i} B_i' t^{\varepsilon_j} r_j \dots r_1 t^\beta$. В качестве $t^{\varepsilon_j} r_j t^{\varepsilon_{j-1}} r_{j-1} \dots r_1 t^\beta$ выберем различные подслова правых половин элементов, включая 1 из множества $\{W_1 \cup W_1^{-1}\}$, где W_1 - специальное множество образующих. В качестве $(t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_i})^{-1}$ - конечные подслова правых половин множества $\{W_2 \cup W_2^{-1}\}$, включая единицу, где W_2 - специальное множество образующих подгруппы $gp(M_0'', S'')$.

Пб. Рассмотрим случай, когда в подгруппах $gp(M_0'', S'')$ и $gp(M_0''', S''')$, множества M_0''' и M_0'' пусты и пусть $\tilde{w}^{-1} = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_k} B_k$.

Предположим, что умножением справа на подслова из подгруппы $gp(M_0''', S''')$ в слове \tilde{w} выделим закрытое конечное подслово максимальной длины $t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2, y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1, y} \dots t^{\varepsilon_1} r_{1y} t^\beta$, совпадающее с подсловом правой половины трансформ некоторой подгруппы (M_i''') , порождающей S''' . В результате получаем $\tilde{w}' = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_1} B_1 \dots t^{\varepsilon_i} B_i t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2, y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1, y} \dots t^{\varepsilon_1} r_{1y} t^\beta$. В подслове $\tilde{w}_L = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ выделим максимально возможное закрытое начальное подслово, совпадающее с подсловом левой половины трансформ некоторой подгруппы (M_i'') , порождающей S'' . При этом возможны случаи:

1. Выделенное начальное подслово из \tilde{w}_L совпадает с самим $\tilde{w}_L = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$. Тогда B_i определяем аналогично тому, как это делается в случае Па), если в подгруппе $gp(M_0^{(4)}, S^{(4)})$, где

$$t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2, y} \dots t^{\varepsilon_1} r_{1y} t^\beta gp(M_0''', S''') t^{-\beta} r_{1y}^{-1} t^{-\varepsilon_1} \dots r_{n_2, y}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_2}} = gp(M_0^{(4)}, S^{(4)}),$$

содержатся порождающие подгруппы $(M_j^{(4)})$ с крыльями не равными 1. Если $S^{(4)} = \{C_i\}$, $C_i < G_\Gamma$ и подгруппа $S^{(5)} = \{C_j\}$, $C_j < G_\Gamma$, то решение проблемы сопряженности H_1, H_2 сводится к сопряжению C_i, C_j в группе G_Γ .

2. Выделенное начальное подслово из $\tilde{w}_L = t^\alpha B_0 t^{\varepsilon_i} B_1 \dots t^{\varepsilon_i}$ не совпадает с \tilde{w}_L . Тогда $\tilde{w}'_\Lambda = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1, x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} B_{n_1} t^{-\varepsilon_{n_1}+1} \dots t^{\varepsilon_i}$, и

$$\tilde{w}' = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} r_{2x}^{-1} \dots r_{n_1, x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} B_{n_1} t^{-\varepsilon_{n_1}+1} \dots t^{\varepsilon_i} B_i t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2, y} t^{\varepsilon_{n_2-1}} r_{n_2-1, y} \dots t^{\varepsilon_1} r_{1y} t^\beta,$$

причем каждая подгруппа $(M_{ij}''') = g_{ij}'''^{-1} C_{ij}''' g_{ij}'''$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{w}'(M_{j's}''')\tilde{w}'^{-1} \subseteq U_{\varepsilon_i}, \quad (27)$$

а каждая подгруппа $(M_{j's}'')$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{w}'^{-1}(M_{j's}'')\tilde{w}' \subseteq U_{\varepsilon_i}, \quad (28)$$

так как в противном случае выделенные подслова не будут максимально возможными, полученными при умножении w слева на слова из $gp(M_0'', S'')$ и справа на слова $gp(M_0''', S''')$.

Пусть подгруппа (M'''_{k_3}) имеет вид:

$$(M'''_{k_3}) = t^{-\beta} r_{1y}^{-1} t^{-\varepsilon_1} \dots r_{n_2, y}^{-1} t^{-\varepsilon_{n_2}} C'''_{n_2} t^{\varepsilon_{n_2}} r_{n_2, y} \dots t^{\varepsilon_1} r_{1y} t^{\beta},$$

а подгруппа (M''_{k_2}) имеет вид

$$(M''_{k_2}) = t^{-\varepsilon_\alpha} r_{1x}^{-1} t^{-\varepsilon'_1} \dots r_{n_1, x}^{-1} t^{-\varepsilon'_{n_1}} C''_{n_2} t^{\varepsilon'_{n_1}} r_{n_1, x} \dots t^{\varepsilon'_1} r_{1x} t^{\varepsilon_\alpha}.$$

Из условий (27) и (28) следует, что все подгруппы из S''' являются подгруппами (M'''_{k_3}) , а подгруппы из S'' являются подгруппами (M''_{k_2}) .

Поэтому $gp(M'_0, S''') = (M'''_{k_3})$, $gp(M'_0, S'') = (M''_{k_2})$. Получили вышерассмотренный случай.

III. Пусть в подгруппах $H_1 = gp(M_0, S)$ и $H_2 = gp(M'_0, S')$ основы S и S' равны единице, т.е. $H_1 = (M_0)$, $H_2 = (M'_0)$ и являются свободными подгруппами [1] в группе G_Γ .

Пусть $(M_0) = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ и $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$. Выясним, будут ли они сопряжены в группе G_Γ , то есть существует ли $z \in G_\Gamma$ такой, что

$$z^{-1}(M_0)z = (M'_0). \quad (29)$$

Элемент z будем выбирать наименьшим в двойном классе смежности $(M_0)z(M'_0)$. Образующие $\{X_i\}_{i=\overline{1, n}}$ подгруппы (M_0) и образующие $\{Y_i\}_{i=\overline{1, n}}$ подгруппы (M'_0) являются специальными и удовлетворяют следующим условиям:

а) закрытая левая половина каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1, n}}$, имеющего нечетную длину, изолирована в множестве $\{\{X_j\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i\} \cup \{\{X_j^{-1}\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i^{-1}\}$, закрытая левая и закрытая правая половины каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1, n}}$, имеющего четную длину, изолированы в множестве $\{\{X_j\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i\} \cup \{\{X_j^{-1}\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i^{-1}\}$;

б) закрытый большой начальный и закрытый большой конечный отрезки каждого $X_i \in \{X_i\}$ изолированы в множестве $\{\{X_j\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i\} \cup \{\{X_j^{-1}\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i^{-1}\}$;

в) для каждого $X_i \in \{X_i\}_{i=\overline{1, n}}$ справедливо соотношение: $l(w_1^{\varepsilon_1} X_i w_2^{\varepsilon_2}) > l(X_i)$, где $w_s \in \{\{X_j\}_{j=\overline{1, n}} \setminus X_i\}$, $s = \overline{1, 2}$.

Образующие подгруппы $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ упорядочены по длинам: $1 < l(Y_1) \leq l(Y_2) \dots \leq l(Y_n)$.

Пусть $X_1 \in (M_0)$ является циклически несократимым образующим. Если все образующие (M_0) циклически сократимы, то, сопрягая (M_0) некоторым элементом z_1 , получим подгруппу $z_1^{-1}(M_0)z_1 = (M'_0)$, в которой элемент $z_1^{-1}X_1z_1 = X'_1$ циклически несократим и $l(X'_1) > 1$. Тогда

$$z^{-1}X_1z = Y_{i_1}^{\varepsilon_1} Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

где $\varepsilon_j = \pm 1, l = \overline{1, k}, l(z^{-1}X_1) > l(z)$ или $l(X_1z) > l(z)$. В противном случае z не удовлетворяет условию минимальности, и поскольку X_1 циклически несократим, то, если имеет место сокращение между z^{-1} и X_1 , произведение X_1z несократимо. Поэтому

$$z^{-1}X_1z = z^{-1}X_0X_nz = z_n^{-1}X_0^{-1}X_0X_nX_0z_n = z_n^{-1}X_nX_0z_n,$$

где $X_1 = X_0X_n \in G_\Gamma$ и

$$z^{-1}X_0X_nz = Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}, l(z_n) \leq \left[\frac{l(Y_n)}{2} \right].$$

Предположим, что $l(z_n) > \left[\frac{l(Y_n)}{2} \right]$. Тогда слово $Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}$ не является простым и, следовательно, его можно представить в виде произведения простых слов, между которыми имеет место касание первого рода: $Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k} = v_1v_2 \dots v_{p-1}v_p$.

Так как $l(z_n) > \left[\frac{l(Y_n)}{2} \right]$ и большой конечный отрезок v_p не затрагивается сокращением, то длину $l(z_n)$ можно уменьшить, умножая справа на v_p^{-1} , $v_p \in (M'_0)$, что противоречит выбору z . Поэтому

$$l(Y_{i_1}^{\varepsilon_1}Y_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots Y_{i_k}^{\varepsilon_k}) \leq l(X_1) + l(Y_n) + 1.$$

Далее, в подгруппе $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ построим множество слов $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, длина которых не превосходит $l(X_1) + l(Y_n) + 1$. Для каждого элемента из множества $v_i \in V$ проверяем, сопряжено ли v_i с X_1 . Допустим, что $v_i = v_{i_0}^{-1}v'_i v_{i_0}$, то есть v'_i — циклически несократимый элемент в G_Γ . Трансформируем подгруппу $(M'_0) = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle$ элементом $v_{i_0}^{-1}$, получим равенство:

$$v_{i_0}^{-1} \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_n \rangle v_{i_0} = \langle Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_n \rangle,$$

где $\{Y'_i\}_{i=\overline{1, n}}$ — специальное множество образующих подгруппы $v_{i_0}^{-1} \langle \{Y_i\}_{i=\overline{1, n}} \rangle v_{i_0}$.

По лемме Колинза имеем: некоторая циклическая перестановка X_1 будет сопряжена с v'_i с помощью элемента h из ассоциированной подгруппы:

$$h^{-1}v'_i h = X'_1, \tag{30}$$

где X'_1 — циклическая перестановка X_1 .

Пусть $X'_1 = t^{\varepsilon_1}B_1t^{\varepsilon_2}B_2t^{\varepsilon_3}B_3 \dots t^{\varepsilon_k}B_k$, $v'_i = t^{\varepsilon_1}A_1t^{\varepsilon_2}A_2t^{\varepsilon_3}A_3 \dots t^{\varepsilon_k}A_k$. Причем X'_1 такая циклическая перестановка, что все соответствующие ε_i у элементов X'_1, v'_i совпадают.

Найдем такое $h \in U_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, что

$$hX'_1 = v'_i h. \tag{31}$$

Слово h будем строить последовательно из h_1, h_2, \dots, h_k , таких что каждое принадлежит ассоциированной подгруппе, причем h_1 переводит B_1 в A_1 ,

h_2 переводит B_2 в A_2 и A_1 оставляет без изменения и т.д. На каждом шаге решаем проблемы пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклический из U_{ε_1} , $\varepsilon_1 = \pm 1$ для нахождения элемента h_i , а затем проблему пересечения конечно порожденной подгруппы с подгруппой из U_{ε_1} для нахождения подгруппы, которой будет принадлежать следующий h_{i+1} , $i + 1 = \overline{1, k}$. На конечном шаге имеем:

$$t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2 t^{\varepsilon_3} A_3 \dots t^{\varepsilon_k} A_k h' = t^{\varepsilon_1} A_1 t^{\varepsilon_2} A_2 t^{\varepsilon_3} A_3 \dots t^{\varepsilon_k} A_k h_1 h_2 \dots h_k.$$

Из вышеизложенного следует, что существует минимальная степень r , такая что

$$a_{i_0}^{rs_{ij}} v'_i = v'_i a_{i_0}^{qs_{ij}}, \quad (32)$$

где $a_{i_0}^{rs_{ij}} \in U_{\varepsilon_1}^{(k)}$.

Тогда выясняем, существует ли показатель Y , чтобы, с одной стороны, выполнялось равенство $a_{i_0}^{rs_{ij}Y} v'_i a_{i_0}^{p_0} = v'_i a_{i_0}^{p_0} a_{i_0}^{qs_{ij}Y}$, а с другой должно выполняться равенство $a_{i_0}^{rs_{ij}Y} v'_i a_{i_0}^{p_0} = v'_i a_{i_0}^{q_0} a_{i_0}^{rs_{ij}Y}$. Из чего имеем:

$$v'_i a_{i_0}^{p_0} a_{i_0}^{qs_{ij}Y} = v'_i a_{i_0}^{q_0} a_{i_0}^{rs_{ij}Y},$$

справедливость которого следует из разрешимости уравнения

$$p_0 + qs_{ij}Y = q_0 + rs_{ij}Y \quad (33)$$

в целых числах.

При $q = r$ и $p_0 \neq q_0$, то слова X_1 и v'_i не сопряжены. Если $p_0 = q_0$, то элемент $a_{i_0}^{s_{ij}rY}$ для любого Y перестановочен с каждым X'_1 . Тогда перебором всех степеней выясняем, существует ли такое Y_1 элемента $a_{i_0}^{s_{ij}rY_1}$, который переводит подгруппу H'_1 в H_2 . Для конечности алгоритма необходимо ограничить показатель rY_1 . Так как в графе Γ группы $G_\Gamma = \langle \prod_{k=1}^n * \langle a_k \rangle | a_i^{p_{ij}} = a_j^{q_{ji}} \rangle$ любые две вершины соединяет единственный путь, то образующие ассоциированных подгрупп a_{i_0} и a_{j_0} связывает соотношение $a_{i_0}^{s_{ij}M} = a_{j_0}^{k_{ji}N}$.

Если $M = N$, то легко проверить, что $h = a_{i_0}^{s_{ij}MC}$ коммутирует с любым словом из группы G_Γ , где $a_{i_0}^C \in C(G_\Gamma)$.

Пусть $M \neq N$. Рассмотрим элемент ассоциированной подгруппы $h = a_{i_0}^{s_{ij}M^l N^l C}$, где $l_0 = l_t(X'_1)$ — число вхождений проходной буквы t элемента X'_1 . Обозначим $\sigma_t(X'_1)$ сумму всех показателей степеней t^{ε_i} , $i = \overline{1, k}$, элемента X'_1 . Если $\sigma_t(X'_1) = 0$, то h коммутирует с X'_1 , тогда в соотношении (33) $q = r$. Следовательно, в данном случае X'_1 и v'_i сопряжены тогда и только тогда когда $p_0 = q_0$. Если $\sigma_t(X'_1) \neq 0$, то равенство (33) выполняется для единственного q . Для проверки сопряженности подгрупп H'_1 и H_2 рассмотрим все степени меньше $h = a_{i_0}^{s_{ij}M^l N^l C}$, где l — наименьшее общее кратное всех $l_i = l_t(X'_i)$, $X'_i \in H'_1$.

Основная теорема доказана.

Список литературы

1. *Безверхний В.Н.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение: межвузовский сб. науч. тр. 1983. С. 50–80.
2. *Безверхний В.Н., Логачева Е.С.* Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т.12. Вып.1. С. 83–101.
3. *Безверхний В.Н., Логачева Е.С.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении древесного произведения циклических групп с циклическим объединением // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 2. С. 30–46.
4. *Логачева Е.С.* Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении бесконечных циклических групп // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 19–40.
5. *Логачева Е.С.* Проблема сопряженности слов в HNN-расширении с конечным числом проходных букв древесного произведения циклических групп с циклическим объединением // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. Вып. 2. С. 50–65.
6. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 450 с.

Логачева Елена Сергеевна (Logacheva-es@mail.ru), аспирант, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

The problem of the conjugation of finitely generated subgroups in the *HNN*-extension of a tree product of cyclic groups with cyclic amalgamation

E.S. Logacheva

Abstract. The conjugacy problem of finitely generated subgroups in the *HNN*-extension of a tree product of cyclic groups associated with cyclic subgroups is solved positively.

Keywords: the group, the subgroup, the *HNN*-extension, the tree product, the conjugacy problem.

Logacheva Elena (Logacheva-es@mail.ru), postgraduate student, department of algebra, mathematical analysis and geometry, Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University.

Поступила 28.12.2014

Термомеханика разрушения тел с трещиноподобным дефектом *

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

Аннотация. В исходном равновесном состоянии телу приписывается отрицательная энергия сцепления, отражающая внутренние взаимодействия. Внешние воздействия сообщают телу дополнительную свободную энергию. При этом энергия сцепления может как увеличиваться, так и уменьшаться по абсолютной величине. Необходимым условием разрушения элементарного объема является достижение энергией сцепления нулевого значения. Принимается, что удельная свободная энергия сцепления уменьшается по абсолютной величине при положительном гидростатическом напряжении и увеличивается при отрицательном (всестороннее сжатие). Рассматривается подход к определению энергии сцепления и удельной поверхностной энергии из решения соответствующей задачи упругопластического деформирования.

Ключевые слова: трещина, упругопластическая модель, характерный размер, поверхностная энергия, метод конечного элемента.

Термомеханика процесса деформирования и разрушения. Основные фундаментальные результаты механики разрушения относятся к моделям, для которых форма трещины задается математическим разрезом [1–3]. Следствием такого подхода являются критерии разрушения, основу которых составляет асимптотическое решение линейной теории упругости. В этом случае такая величина, как поверхностная энергия, определяется через предельное значение коэффициента интенсивности напряжений, что подразумевает бесконечное напряжение в особой точке. Распространение поверхности разрыва в виде физического разреза дает возможность рассмотреть разрушение как термомеханический процесс. Элементарному объему ΔV_0 тела в начальном состоянии ставится в соответствии свободная энергия сцепления, которая принимается отрицательной: $\Delta F_0 = -|\psi_0| \Delta V_0$, где $-|\psi_0|$ — энергия сцепления, отнесенная к начальному объему. В результате внешних воздействий полная свободная энергия материального объема изменяется

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-97501-р_центр_а, 13-08-00134-а, 15-01-01875-а) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 467).

$\Delta F = \Delta F_0 + \psi \Delta V_0$, где ψ — положительная удельная свободная энергия. Если сплошность объема сохраняется, то после снятия внешней нагрузки энергия ψ обращается в ноль, однако энергия сцепления может при этом измениться. В дальнейшем полагаем, что при сохранении сплошности значение энергии сцепления в ненапряженном состоянии остается неизменным. В то же время считаем, что в процессе нагружения энергия сцепления может как возрастать, так и уменьшаться по абсолютной величине обратимо вплоть до достижения критического состояния предразрушения. В частности, принимаем, что составляющая свободной энергии, связанная с изменением напряженного состояния, в соответствии с законом Гука в изотермическом приближении имеет вид: $\psi = \sigma^2 / (2K) + \tau^2 / (4G)$, где G и K — модули упругости; $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / 3$; $\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$ — свертка девиаторных составляющих тензора напряжений.

Обратимое изменение энергии сцепления принимаем в виде:

$$\psi_c = -|\psi_0| + \sigma^2 \operatorname{sgn}(\sigma) / (2K) + \tau^2 / (4G). \quad (1)$$

Из выражения (1) следует, что всестороннее обжатие, когда $\sigma < 0$, увеличивает энергию сцепления, а всестороннее растяжение $\sigma > 0$ уменьшает.

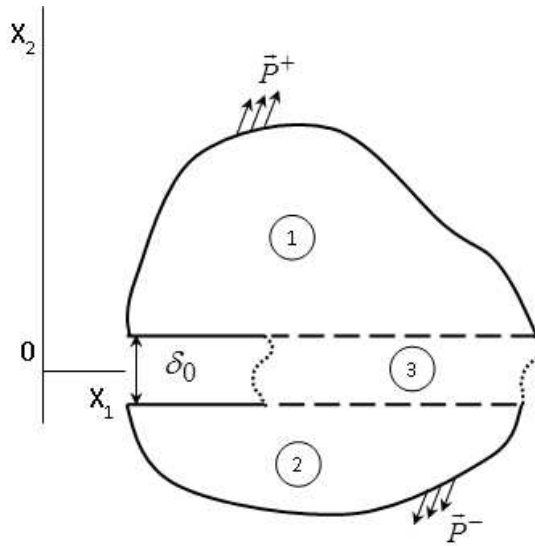


Рис. 1. Тело с трещиной

Будем считать состояние элементарного объема критическим или k -состоянием, если выполняется условие

$$\psi_c^k = -|\psi_0| + \sigma^2 \operatorname{sgn}(\sigma) / (2K) + \tau^2 / (4G) = 0. \quad (2)$$

Данное состояние неустойчиво, так как при сколь угодно малом догружении объем переходит в состояние разрушения (m -состояние), тогда

$$\psi_c^m \equiv 0. \quad (3)$$

Если же из состояния k производится разгрузка, то энергия сцепления возвращается к исходному состоянию

$$\psi_c = -|\psi_0|. \quad (4)$$

Начальная стадия процесса деформирования и разрушения тела, ослабленного физическим разрезом. На рис. 1 представлено тело с трещиной в виде физического разреза. Материальная область 3, лежащая на продолжении физического разреза определена в качестве слоя взаимодействия (СВ). В работах [4–6] была разработана модель образования материальных поверхностей на концепции СВ. Предполагалось, что материал СВ образует приповерхностные слои, минуя стадию разрушения. Здесь рассматривается модифицированная модель, в соответствии с которой материал СВ с начальной толщиной δ_0 разрушается, а примыкающие к нему участки образуют приповерхностные слои толщиной $\delta_0/2$. Из основного термомеханического соотношения и конечности нагрузки, действующей на элемент СВ со стороны окружающего материала, используя условия (2) и (3), получим

$$\psi_c^m - \psi_c^k = 0. \quad (5)$$

Отметим, что изменение диссипации, кинетической энергии и работы внешних нагрузок являются малыми более высокого порядка относительно длины разрушающегося элемента и поэтому не входят в правую часть (5). Из выражений (2), (3) и (5) получаем определение исходной энергии связи для внешнего нагружения $\sigma > 0$:

$$|\psi_0| = \sigma_k^2 / (2K) + \tau_k^2 / (4G) = \psi_k. \quad (6)$$

Из (6) следует, что в данном случае энергия сцепления равна энергии, полученной за счет внешних воздействий при переходе из начального состояния в критическое.

Из термомеханического соотношения, записанного для элементов, образующих приповерхностные слои, следует, что

$$2\gamma_0 = |\psi_0| / \delta_0 = \psi_k / \delta_0, \quad (7)$$

где γ_0 — удельная поверхностная энергия, аккумулируемая в образованных приповерхностных слоях.

Определение напряженно-деформированного состояния в теле с трещиной в виде физического разреза. В соответствии с предлагаемой моделью состояние тела перед разрушением будет зависеть от распределения характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС) в СВ. В

работе [7] были определены средние напряжения в СВ через граничные, связанные условиями равновесия. Использование средних характеристик НДС по толщине слоя позволяет не конкретизировать геометрию окончания физического разреза (на рис. 1 граница показано волнистой линией), а введение линейного размера δ_0 — исключить сингулярность в модельном представлении трещины.

В статье [8] дана вариационная постановка для тела конечных размеров с трещиной. В этом случае решение задачи о нахождении НДС в поврежденном теле сводится к совместному решению двух уравнений:

$$\int_{S_1} \sigma_{\sim} \cdot \delta \varepsilon_{\sim} ds + \int_{\ell_1} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dl + \int_{\ell_1} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^+ dl + \delta_0 \left(0.5 \int_{\ell_1} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dl + 0.5 \int_{\ell_1} \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dl \right) = \int_{L_1} \vec{P}^+ \cdot \delta \vec{u} dl, \quad (8)$$

$$\int_{S_2} \sigma_{\sim} \cdot \delta \varepsilon_{\sim} ds - \int_{\ell_2} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dl - \int_{\ell_2} \bar{\sigma}_{21} \delta u_1^- dl + \delta_0 \left(0.5 \int_{\ell_2} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dl + 0.5 \int_{\ell_2} \bar{\sigma}_{21} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dl \right) = \int_{L_2} \vec{P}^- \cdot \delta \vec{u} dl, \quad (9)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$ — средние значения компонент тензора напряжений в СВ; \vec{u}^+ , \vec{u}^- — поле перемещений на верхней и нижней границах СВ; σ_{\sim} , ε_{\sim} — тензоры напряжений и деформаций; \vec{P}^+ , \vec{P}^- — вектора внешней нагрузки для тела 1 и тела 2 (см. рис. 1).

Отметим, что задача (8), (9) может быть решена в рамках любых определяющих соотношений и методов решения вариационных уравнений. Основной неизвестной предлагаемой постановки является введенный в модель линейный размер δ_0 . Рассмотрим процедуру нахождения данного параметра, исходя из известных механических характеристик материала и решения соответствующей задачи (8) и (9). Известно, что основной характеристикой трещиностойкости материалов является вязкость разрушения K_{IC} . Данная величина определяется для нагружения трещины нормальным отрывом в состоянии плоской деформации. Отметим, что эта характеристика рассматривается для модельного представления трещины в виде математического разреза и используется для квазихрупких материалов. По данной величине можно рассчитать критическую нагрузку, соответствующую началу образования новых материальных поверхностей, для определенной схемы нагружения. Так как модельное представление трещины не должно влиять на разрушающую нагрузку, то решение задачи при критической нагрузке приводит к зависимости НДС от линейного размера δ_0 , в том числе и в зоне предразрушения. Рассматривая в качестве начала разрушения критическое значение напряжения, из полученной зависимости можно получить оценку δ_0 .

В рамках деформационной теории пластичности для схемы нагружения распределенным давлением для тела с центральной трещиной была рассмотрена соответствующая методика для трех конструкционных сталей: Ст.3, 15Х2МФА, 15Х2МНФА. На рис. 2 представлены зависимости максимальных главных напряжений в конце трещины от толщины слоя при критической нагрузке, рассчитанной в рамках концепции квазихрупкого разрушения: Ст.3 — 1, 15Х2МФА — 2, 15Х2МНФА — 3.

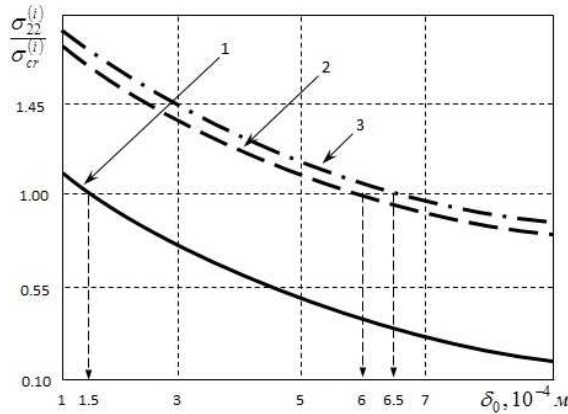


Рис. 2. Определение толщины слоя взаимодействия

Сопоставление критических напряжений с расчетными значениями по графикам рис. 2 привело к следующим значениям введенного линейного параметра для рассматриваемых сталей: Ст.3 — $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, 15Х2МФА — $6 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, 15Х2МНФА — $6.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$. Зная толщину слоя в рамках уравнений (8), (9) и определяющих соотношений, можно определять НДС поврежденных тел, в том числе и при произвольном нагружении. С использованием (6) может быть вычислена энергия связи и по (7) определена удельная поверхностная энергия.

Список литературы

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
3. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1991. 416 с.
4. Глаголев В.В., Маркин А.А. Определение термомеханических характеристик процесса разделения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 101–112.
5. Глаголев В.В., Маркин А.А. Модели процесса деформирования и разделения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 148–157.

6. Глаголев В.В., Маркин А.А. О распространении тонких пластических зон в окрестности трещины нормального отрыва // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50. № 5. С. 206–217.
7. Глаголев В.В., Маркин А.А. Нахождение предела упругого деформирования в концевой области физического разреза при произвольном нагружении его берегов // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 5. С. 174–183.
8. Glagolev V.V., Markin A.A. Stress-Strain State in Elastic Body with Physical Cut // World Journal of Mechanics. 2013. Vol. 3. No. 7. P. 299–306.

Глаголев Вадим Вадимович (vadim@tsu.tula.ru), д.ф.-м.н., профессор, кафедры математического моделирования, Тульский государственный университет.

Маркин Алексей Александрович (markin-nikram@yandex.ru), д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Thermomechanics destruction of bodies with crack-like defect

V. V. Glagolev, A. A. Markin

Abstract. In the initial equilibrium state body is attributed to the negative energy of adhesion, which reflects the internal interaction. External influences have reported additional free energy of the body. The energy of the clutch can both increase and decrease in absolute value. A necessary condition for the destruction of the elementary volume is to achieve energy coupling zero. It is assumed that the specific free energy of adhesion decreases in absolute value for a positive hydrostatic stress and increases with the negative (full compression). An approach to the determination of the adhesion energy and the specific surface energy of the solutions of the corresponding problem of elastoplastic deformation.

Keywords: crack, elastoplastic model, characteristic size, surface energy, finite element method.

Glagolev Vadim (vadim@tsu.tula.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of mathematical modelling, Tula State University.

Markin Alexey (markin-nikram@yandex.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of department, department of mathematical modelling, Tula State University.

Поступила 13.02.2015

Комбинированный сдвиг сжимаемого нелинейно-упругого полого цилиндра *

А. А. Маркин, В. В. Козлов

Аннотация. Рассматривается один из видов нагружения нелинейно-упругих материалов — комбинированный сдвиг полого цилиндра. На основании результатов решения задачи предлагается методика определения адекватности представления свойств материала выбранной связью напряжений и деформаций. В частности, используется соотношение из класса, в рамках которого можно контролируемо учитывать различные механические эффекты, удовлетворить частному постулату изотропии Ильюшина.

Ключевые слова: комбинированный сдвиг, полый цилиндр, нелинейная теория упругости, определяющие соотношения.

1. Введение

Рассмотрим одно из осесимметричных нагружений нелинейно-упругих, сжимаемых, изотропных материалов — равновесный процесс комбинированного сдвига полого цилиндра достаточно большой длины. При этом внутренняя и внешняя поверхности цилиндра скреплены с жесткими обоймой 2 и валом 1. Валик 1 закреплён неподвижно. К обойме 2 приложен момент и сила в направлении оси симметрии. Внутренний радиус цилиндра обозначим R_2 , внешний — R_1 . Расчетная схема приведена на рис. 1.

Установим отличие данного исследования от исследований, проводимых в отношении похожих видов нагружений. Так, в работах Э.Э. Лавендела [3], В.И. Бидермана [1] рассматривается задача кругового сдвига (приложен только момент M) для несжимаемого материала. Л.И. Лурье [4] изучает круговой сдвиг, но в рамках модели сжимаемого материала, Бейтс [9] — круговой сдвиг сжимаемого материала: на кинематические характеристики процесса накладываются ограничения, упрощающие выкладки, в результате использования которых изменение объема в процессе деформирования не происходит. Вследствие этого авторы устанавливают, каким дополнитель-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-97501-р_центр_а, 14-01-31138-мол_а, 15-01-01875-а).

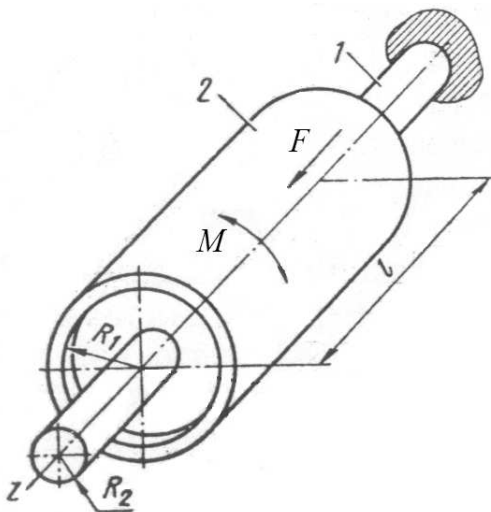


Рис. 1. Схема нагружения цилиндра

ным условиям должны удовлетворять определяющие соотношения для того, чтобы их можно было применить к фактически несжимаемым материалам.

Таким образом, в данной статье принимается более общее осесимметричное нагружение цилиндра, на кинематику не накладывается дополнительных ограничений.

Результаты решения задачи о комбинированном сдвиге полого цилиндра могут быть использованы для апробации определяющего соотношения. Общность предложенной постановки задачи подчеркивается возможностью её записи для любого определяющего соотношения, принципы построения которого соответствуют изложенным в данной работе. К таким относятся классические соотношения Гузя, Мурнагана и т.п. Однако результаты решения задачи приведены для связи напряжений и деформаций, построенной в рамках подхода, обозначенного в работах Л.А. Толоконникова [8], А.А. Маркина [5], А.В. Муравлева [7] и позволяющего контролируемо учитывать различные механические эффекты, удовлетворять частному постулату изотропии Ильюшина.

2. Постановка задачи

2.1. Кинематика. Задачу об исследовании напряжённо-деформированного состояния полого цилиндра при комбинированном сдвиге естественно решать в цилиндрической системе координат.

Пусть $(x^1, x^2, x^3) = (R, \theta, z_0)$ — цилиндрические координаты материальной точки цилиндра в начальном состоянии (среда недеформирована), (r, φ, z) — цилиндрические координаты этой же точки в деформированном (ось Oz совпадает с осью симметрии цилиндра).

В рамках описываемой модели связь между указанными координатами будет выглядеть следующим образом:

$$r = r(R); \quad \varphi = \theta + \theta_R(R); \quad z = z_0 + z_R(R), \quad (1)$$

где $r(R)$, $z_R(R)$, $\theta_R(R)$ — некоторые гладкие функции (обобщенные перемещения).

В дополнение к исходной цилиндрической системе координат с базисом \vec{e}_i ($\vec{e}_1 = \vec{e}_R$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_{z_0}$) вводится подвижная цилиндрическая система координат, повернутая относительно исходной на угол θ_R и характеризуемая базисом $\vec{e}_i^{(n)}$ ($\vec{e}_1^{(n)} = \vec{e}_r$, $\vec{e}_2^{(n)} = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_3^{(n)} = \vec{e}_z$).

Из представлений (1) следует форма записи радиус-вектора положения точки в деформированном состоянии \vec{x} :

$$\vec{x} = r \vec{e}_r + (z_0 + z_R) \vec{e}_{z_0}.$$

Запишем выражения векторов материального базиса $\vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i}$:

$$\vec{\varepsilon}_1 = r' \vec{e}_r + r \theta'_R \vec{e}_\varphi + z'_R \vec{e}_{z_0}, \quad \vec{\varepsilon}_2 = r \vec{e}_\varphi, \quad \vec{\varepsilon}_3 = \vec{e}_{z_0}.$$

Из последних формул можно найти базис $\vec{\varepsilon}^i$, взаимный по отношению к материальному:

$$\vec{\varepsilon}^1 = \frac{\vec{e}_r}{r'}, \quad \vec{\varepsilon}^2 = \frac{\vec{e}_\varphi}{r} - \frac{\theta'_R}{r'} \vec{e}_r, \quad \vec{\varepsilon}^3 = \vec{e}_{z_0} - \frac{z'_R}{r'} \vec{e}_r. \quad (2)$$

Приведём диадное представление аффинора деформации:

$$\underline{\Phi} = \overset{\circ}{\nabla} \vec{x} = r' \vec{e}_R \vec{e}_r + r \theta'_R \vec{e}_R \vec{e}_\varphi + z'_R \vec{e}_R \vec{e}_z + \frac{r}{R} \vec{e}_\theta \vec{e}_\varphi + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_z = \Phi^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j^{(n)}, \quad (3)$$

а также опишем подход к нахождению его полярного разложения $\underline{\Phi} = \underline{U} \cdot \underline{R}$ [5], где \underline{U} — левая мера искажения, \underline{R} — тензор поворота.

Конкретизируем меру Коши–Грина $\underline{G} = \underline{U}^2 = \underline{E} + \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} + \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{u} \overset{\circ}{\nabla}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{G} = \underline{U}^2 = \underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi}^T &= \left(r'^2 + z_R'^2 + (R \theta'_R)^2 \right) \vec{e}_R \vec{e}_R + z'_R (\vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_R) + \\ &+ \frac{r^2}{R} \theta'_R (\vec{e}_R \vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta \vec{e}_R) + \frac{r^2}{R^2} \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_{z_0} = G^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Найдем левую меру искажения \underline{U} , используя очевидную в рамках формулы (4) связь между главными значениями тензоров \underline{U} и \underline{G} , а также равенство между собой наборов их собственных векторов.

Собственные значения меры \mathcal{G} находятся из уравнения $|G^{ij} - \lambda^G \delta^{ij}| = 0$. Задача определения собственных значений меры Коши–Грина приводит нас к кубическому уравнению, аналитические решения которого весьма громоздки и неудобны для дальнейшего анализа и построения собственных векторов. Поэтому в среде *MatLab* разработан алгоритм численного нахождения различных мер (в частности, полярного разложения аффинора, левого тензора Генки) при указании значений r, r', θ'_R, z'_R в точке.

Поскольку диады меры \mathcal{G} состоят только из базисных векторов неподвижной цилиндрической системы координат, то производные меры $\mathcal{U}, \xi, \mathcal{I}$ также будут содержать в диадах только векторы \vec{e}_i . В то же время методика получения тензора поворота $\mathcal{R} = \mathcal{U}^{-1} \cdot \mathcal{F}$ с учетом формулы (3) указывает, что диадное представление тензора \mathcal{R} будет иметь вид

$$\mathcal{R} = R^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j^{(n)}. \quad (5)$$

Запишем для полноты изложения тензор деформаций Коши–Грина $\xi = \frac{1}{2} (\mathcal{G} - \mathcal{E})$ исходя из формулы (4):

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{2} \left[\left(r'^2 + z'_R{}^2 + (R\theta'_R)^2 - 1 \right) \vec{e}_R \vec{e}_R + z'_R (\vec{e}_R \vec{e}_{z_0} + \vec{e}_{z_0} \vec{e}_R) + \right. \\ \left. + \frac{r^2}{R} \theta'_R (\vec{e}_R \vec{e}_\theta + \vec{e}_\theta \vec{e}_R) + \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) \vec{e}_\theta \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned}$$

При необходимости могут быть конкретизированы и другие меры описания деформированного состояния. Формулы данного пункта показывают, что компоненты тензоров деформаций зависят от функций обобщенных перемещений, их производных и радиальной координаты. Следовательно, получив обобщенные перемещения, деформированное состояние при комбинированном сдвиге будет полностью определено и компоненты мер деформированного состояния можно рассматривать как функции радиальной координаты.

2.2. Уравнение равновесия и разрешающие уравнения для неизвестных функций. Ввиду отсутствия массовых сил уравнение равновесия примет вид [5]

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{S} = \vec{0},$$

где $\vec{\nabla} = \vec{\varepsilon}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$ — оператор Гамильтона в актуальном базисе.

В силу того, что нагружение осесимметрично и не зависит от координаты z_0 , компоненты тензора напряжений зависят только от радиальной координаты: $S^{ij} = S^{ij}(R)$. Положим, что тензор напряжений записан разложением по диадам, составленным из базисных векторов повернутой цилиндрической

системы координат, то есть $\mathcal{S} = S^{ij} \vec{e}_i^{(n)} \vec{e}_j^{(n)}$. Тогда, рассмотрев последнее выражение и конкретизируя производные $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial X^i}$, с учетом (2) получаем уравнение равновесия в виде

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathcal{S} &= \left(\frac{1}{r'} \frac{ds_{rr}}{dR} + \frac{s_{rr} - s_{\varphi\varphi}}{r} \right) \vec{e}_r + \\ &+ \left(\frac{1}{r'} \frac{ds_{r\varphi}}{dR} + \frac{2s_{r\varphi}}{r} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r'} \frac{ds_{rz}}{dR} + \frac{s_{rz}}{r} \right) \vec{e}_z = \vec{0}. \end{aligned}$$

Для решения задачи и интерпретации результатов удобнее работать с безразмерными переменными. Введем переменную $\rho = R/R_1$ и безразмерный тензор напряжений Коши $\mathcal{S}(\rho)/(2G)$ (далее \mathcal{S}). Запишем безразмерные уравнения равновесия в координатной форме:

$$\begin{cases} \frac{1}{r'} \frac{ds_{rr}}{d\rho} + \frac{s_{rr} - s_{\varphi\varphi}}{\rho} = 0, \\ \frac{1}{r'} \frac{ds_{r\varphi}}{d\rho} + \frac{2s_{r\varphi}}{\rho} = 0, \\ \frac{1}{r'} \frac{ds_{rz}}{d\rho} + \frac{s_{rz}}{\rho} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Внешний радиус цилиндра обозначим $\widehat{R}_1 = R_1/R_1 = 1$, а внутренний — $\widehat{R}_2 = R_2/R_1$.

Сформулируем для данной задачи граничные условия в перемещениях: на внутреннем радиусе перемещения отсутствуют, а на внешнем достигаются осевое смещение h_z и смещение точек в круговом направлении на дугу $\widehat{R}_1 \theta_R(\widehat{R}_1)$. Что касается функции $r(\rho)$, то на внешнем и внутреннем начальных радиусах она совпадает с соответствующими значениями этих радиусов. В безразмерных переменных данные граничные условия принимают вид

$$\theta_R(\widehat{R}_2) = 0, \quad \theta_R(\widehat{R}_1) = \alpha, \quad (7)$$

$$z_R(\widehat{R}_2) = 0, \quad z_R(\widehat{R}_1) = h_z, \quad (8)$$

$$r(\widehat{R}_2) = \widehat{R}_2, \quad r(\widehat{R}_1) = \widehat{R}_1. \quad (9)$$

Таким образом, (6)–(9) вместе с формулой для компонент тензора истинных напряжений Коши определяют постановку решаемой задачи определения обобщенных перемещений.

2.3. Определяющие соотношения. Постановка задачи (6)–(9) будет полной, если с помощью выбранной связи напряжений и деформаций конкретизировать тензор истинных напряжений Коши. Рассмотрим подходы

к построению определяющих соотношений нелинейно-упругих изотропных сжимаемых материалов.

Принимая в качестве параметров состояния для начально изотропного тела тензор деформации Коши-Грина и температуру, свободная энергия ψ будет функцией трех алгебраических инвариантов тензора Коши-Грина и температуры T :

$$\psi = \psi (J_1, J_2, J_3, T).$$

Представим элементарную работу через энергетический тензор напряжений в виде [5] $d'A^{(e)} = \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{\underline{\varepsilon}}$. Тогда на основании рассуждений из работы [5] получим связь напряжений и деформаций в форме

$$\underline{\underline{T}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial J_1} + J_1 \frac{\partial \psi}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \right) \underline{\underline{E}} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial J_2} + J_1 \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \right) \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \psi}{\partial J_3} \underline{\underline{\varepsilon}}^2, \quad (10)$$

где $\underline{\underline{E}}$ — единичный тензор.

Для данного подхода наиболее простая форма свободной энергии, предлагаемая в работе Гузя [2], имеет вид

$$\psi = c_1 J_1^2 + c_2 J_2.$$

Рассмотрим свободную энергию как функцию естественных инвариантов левого тензора Генки $\underline{\underline{\Gamma}} = \ln \underline{\underline{U}}$, где $\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{E}} + \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} + \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} \cdot \vec{u} \overset{\circ}{\nabla}$.

Естественные инварианты левого тензора Генки $\theta = \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{E}}$ и ε (здесь $\varepsilon^2 = \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}}$) [5], в отличие от алгебраических инвариантов тензора Коши-Грина, имеют четкий физический смысл при конечных деформациях, а именно изолированно характеризуют изменение объема и формы соответственно. Тогда в рамках частного постулата изотропии Ильюшина, предполагающего независимость свободной энергии от угла вида тензора деформации Генки γ ($\cos 3\gamma = 3\sqrt{6} \frac{|\underline{\underline{\Gamma}}_{ij}|}{\varepsilon^3}$), свободная энергия примет вид

$$\psi = \psi (\theta, \varepsilon, T). \quad (11)$$

Преобразуем работу внешних сил в форме $d'A^{(e)} = \underline{\underline{\sigma}}_R \cdot d\underline{\underline{\Gamma}}$ [5]. Тогда, повторяя рассуждения из работы [5], получим

$$\underline{\underline{\sigma}}_R = \tilde{\sigma}_R + \sigma_0 \underline{\underline{E}} = \frac{\tilde{\Gamma}}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \underline{\underline{E}}. \quad (12)$$

Рассмотрим представление (11) в форме прямого обобщения соотношений линейной теории упругости, что приведет нас к выражению, приведенному в [5]:

$$\psi = \psi_0 - \eta_0 T - b\vartheta\theta - \frac{1}{2} \frac{C_\rho \vartheta^2}{T_0} + \frac{1}{2} K\theta^2 + G\varepsilon^2,$$

где ψ_0 — начальная энергия; $\vartheta = T - T_0$; b, C_ρ, K, G — постоянные.

Тогда для сжимаемых материалов в рамках изотермических процессов при подстановке последнего выражения в связь напряжений и деформаций (12) получим

$$\varrho_R = \tilde{\sigma}_R + \sigma_0 \tilde{E} = 2G\tilde{\Gamma} + K\theta \tilde{E}. \quad (13)$$

По форме полученная связь напряжений и деформаций (13) асимптотически вырождаются в закон Гука [6] для малых деформаций.

2.4. Напряженное состояние. Поскольку в п.2.2 в уравнении равновесия содержится тензор истинных напряжений Коши, укажем принципы конкретизации данного тензора. Так как рассматривается сжимаемый материал, его напряженное состояние описывается общими формулами (10) либо (12), в которых по сути определяются выражения тензоров \tilde{T} или ϱ_R как функции мер деформированного состояния $\underline{\varepsilon}, \underline{\Gamma}$. Применительно к данной задаче в п.2.1 отмечено, что компоненты мер $\underline{\varepsilon}, \underline{\Gamma}$ зависят от обобщенных перемещений, их производных и радиальной координаты. Следовательно,

$$\begin{aligned} T^{ij} &= T^{ij}(r(R), r'(R), \theta'_R(R), z'_R(R), R), \\ (\sigma_R)^{ij} &= (\sigma_R)^{ij}(r(R), r'(R), \theta'_R(R), z'_R(R), R). \end{aligned} \quad (14)$$

Как следует из п.2.1 и формул (10), (12), тензоры \tilde{T}, ϱ_R будут содержать в диадах только векторы неподвижной цилиндрической системы координат $\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_{z_0}$. На примере тензора ϱ_R покажем, что в таком случае в простейшем представлении тензора $\underline{\mathcal{S}}$ базисные диады будут включать только векторы повернутой цилиндрической системы координат.

При использовании меры $\varrho_R = \sigma_R^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ тензор истинных напряжений Коши $\underline{\mathcal{S}}$ определяется из связи мер напряжений [5]

$$\underline{\mathcal{S}} = \sqrt{\frac{g}{G}} R^{-1} \cdot \varrho_R \cdot R.$$

Тогда с учетом свойства ортогональности тензора поворота и его выражения (5) получим естественное разложение тензора истинных напряжений по базису подвижной цилиндрической системы:

$$\underline{\mathcal{S}} = \sqrt{g/G} R^{pl} \vec{e}_l^{(n)} \vec{e}_p \cdot (\sigma_R)^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot R^{km} \vec{e}_k \vec{e}_m^{(n)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{g/G} R^{pl} (\sigma_R)^{ij} R^{km} \underbrace{(\vec{e}_p \cdot \vec{e}_i)}_{\delta^{pi}} \underbrace{(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)}_{\delta^{jk}} \vec{e}_l^{(n)} \vec{e}_m^{(n)} = \\
&= \sqrt{g/G} R^{il} (\sigma_R)^{ij} R^{jm} \vec{e}_l^{(n)} \vec{e}_m^{(n)} = s^{lm} \vec{e}_l^{(n)} \vec{e}_m^{(n)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

На основе последних выкладок, начиная с (14), а также конкретизированных мер деформированного состояния из п.2.1 следует, что все компоненты тензора истинных напряжений Коши зависят только от параметра R и функций обобщенных перемещений $r(R)$, $\theta_R(R)$ и $z_R(R)$.

3. Численный метод

Конкретизация постановки задачи (6)–(9) возможна с применением одного из определяющих соотношений для сжимаемой упругой среды (10), (12) и выражения свободной энергии, примеры которой можно найти в п.2.3. В результате получаем систему трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $r(\rho)$, $\theta_R(\rho)$ и $z_R(\rho)$, поскольку рассмотренные меры описания напряженно-деформированного состояния в конечном итоге зависят от этих функций, как показано в п.2.4. Получение результатов задачи (6)–(9) с выбранным определяющим соотношением реализовано в среде *MatLab* численным итерационным методом, где для начального приближения использовалось аналитическое решение задачи комбинированного сдвига нелинейно-упругого несжимаемого материала из линейной теории упругости:

$$\theta_R = \frac{\alpha \widehat{R}_1^2}{\widehat{R}_2^2 - \widehat{R}_1^2} \left(\frac{\widehat{R}_2^2}{\rho^2} - 1 \right), \quad z_R = \frac{h_z \left(\ln \rho - \ln \widehat{R}_2 \right)}{\ln \widehat{R}_1 - \ln \widehat{R}_2}.$$

Отметим, что для получения последних выражений введена гипотеза сохранения значения радиальной координаты в процессе деформирования $r = \rho$, что существенно упростило выкладки.

4. Результаты

Найдя зависимость функций обобщенных перемещений от радиальной координаты, можем построить любую интересующую меру описания напряженно-деформированного состояния сплошной среды, в частности, модельные значения силы $F(\alpha, h_z)$ и момента $M(\alpha, h_z)$, приложенных к внешней обойме, которые легко можно наблюдать и в эксперименте. Учитывая независимость от координаты z мер напряженно-деформированного состояния, формулы вычисления силы F и момента M в безразмерных координатах, приходящиеся на единицу высоты цилиндра (в качестве таковой возьмем значение \widehat{R}_1), сводятся к соотношениям

$$F = 2\pi \widehat{R}_1^2 s_{rz}(\widehat{R}_1), \quad M = 2\pi \widehat{R}_1^3 s_{r\varphi}(\widehat{R}_1).$$

Приведем на рис. 2, 3 для различных траекторий деформирования (зависимостей $\alpha = \alpha(t)$, $h_z = h_z(t)$ на внешней обойме, где t — некоторый параметр) графики модельных зависимостей $M(\alpha, h_z)$, $F(\alpha, h_z)$, приложенных к единице длины цилиндра, в рамках решенной задачи (6)–(9) с тензором истинных напряжений Коши, полученным по формуле (15) для определяющего соотношения (13) $\underline{\sigma}_R = 2G\tilde{\Gamma} + K\theta\underline{E}$ ($K = 100G$).

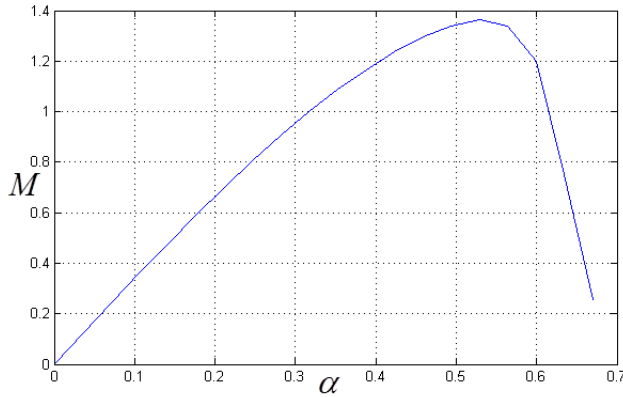


Рис. 2. Зависимость $M(\alpha)$ для кругового сдвига при $\alpha(t) = t$, $h_z(t) = 0$, $t \in [0, 0.67]$, $R_2 = 0.6$, $R_1 = 1$

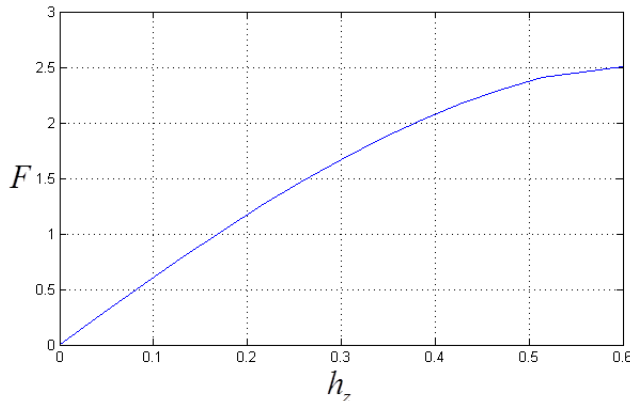


Рис. 3. Зависимость $F(h_z)$ для осевого сдвига при $\alpha(t) = 0$, $h_z(t) = t$, $t \in [0, 0.6]$, $R_2 = 0.6$, $R_1 = 1$

Таким образом, сравнивая модельные и экспериментальные зависимости $M(\alpha, h_z)$, $F(\alpha, h_z)$, можно сделать выводы об адекватности представления материала выбранным определяющим соотношением.

Список литературы

1. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 975 с.
2. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. К.: Наукова думка, 1973. 270 с.
3. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 228 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Маркин А.А., Христинич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд., доп. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.
6. Маркин А.А. Термомеханика сплошной среды: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. 140 с.
7. Муравлев А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 99–102.
8. Толоконников Л.А. Вариант соотношений разномодульной теории упругости // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 102–104.
9. Beatty Millard F., Qing Jiang On compressible materials capable of sustaining axisymmetric shear deformations. Part 2: rotational shear of isotropic hyperelastic materials // Q. J. Mechanics Appl. Math. 1997. V. 50. № 2. P. 211–237.

Маркин Алексей Александрович (markin-nikram@yandex.ru), д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Козлов Виктор Вячеславович (victor1986t@mail.ru), к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Combined shear compressible nonlinearly elastic hollow cylinder

A. A. Markin, V. V. Kozlov

Abstract. We consider one of the types of loading nonlinear-elastic materials - combined shear of the hollow cylinder. Based on the results of solving the problem is proposed technique for determining the adequacy of the presentation of the material properties of the selected relation stresses and strains. In particular, we use the ratio of the class in which can be controlled various mechanical effects, to satisfy the private isotropy postulate И'юшин.

Keywords: combined shear, hollow cylinder, nonlinear elasticity theory, the defining relationships.

Markin Alexey (markin-nikram@yandex.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of department, department of mathematical modelling, Tula State University.

Kozlov Viktor (viktor1986t@mail.ru), candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of mathematical modelling, Tula State University.

Поступила 19.02.2015

Геометрия поперечных сечений балки при ее конечном чистом изгибе с учетом сдвиговых деформаций *

А. А. Маркин, А. С. Харламов

Аннотация. Рассмотрены перемещения свободной балки в плоскости ее поперечных сечений в процессе ее конечного чистого изгиба. В рамках теории упругости получены точные решения для поля перемещений точек балки в случае конечных поворотов срединной линии и с учетом малости деформаций в плоскости поперечных сечений. Помимо этого при построении решения была найдена функция для определения сдвиговых деформаций.

Ключевые слова: балка, чистый изгиб, поперечное сечение, конечный поворот, теория упругости, сдвиговые деформации.

Рассмотрим исходную конфигурацию балки с прямоугольным поперечным сечением. Пусть рассматриваемая балка имеет следующие размеры:

$$-\frac{l_0}{2} \leq X_1 \leq \frac{l_0}{2}, \quad -\frac{h_0}{2} \leq X_2 \leq \frac{h_0}{2}, \quad -\frac{n_0}{2} \leq X_3 \leq \frac{n_0}{2}.$$

Система координат и изображение начальной конфигурации балки представлены на рис. 1.

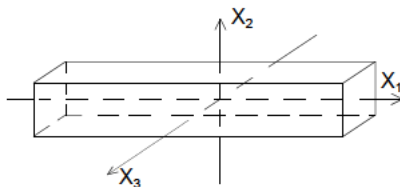


Рис. 1. Начальная конфигурация балки

Рассмотрим чистый изгиб балки под действием двух равных по модулю, но противоположных по направлению моментов, приложенных к торцам $X_1 = \frac{l_0}{2}$ и $X_1 = -\frac{l_0}{2}$. Вследствие чистого изгиба срединная линия в деформи-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-01875-а).

рованном состоянии будет иметь одинаковую во всех точках кривизну (будет иметь вид дуги окружности). Введем следующие основные гипотезы:

- поперечные сечения, перпендикулярные срединной линии в начальном состоянии, останутся перпендикулярными к срединной линии и в деформированном состоянии;
- деформации в плоскости поперечных сечений малы (поворот и деформации в плоскости X_1X_2 считаем конечными);

Рассмотрим радиус вектор \bar{R}_0 произвольной точки в начальном состоянии:

$$\bar{R}_0 = \bar{r}_0 + X_2\bar{e}_2 + X_3\bar{e}_3, \quad \bar{r}_0 = X_1\bar{e}_1, \quad (1)$$

где \bar{r}_0 — радиус вектор точки срединной линии в начальном состоянии. В деформированном состоянии радиус-вектор этой же точки срединной линии можно записать с помощью вектора перемещения:

$$\bar{s} = \bar{r}_0 + \bar{u}^{(0)}(X_1). \quad (2)$$

Рассмотрим срединную линию балки в деформированном состоянии (рис. 2).

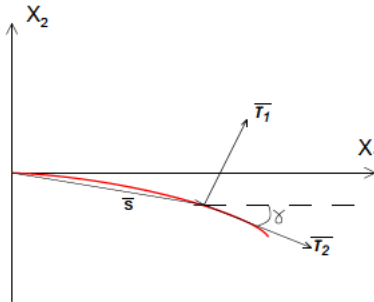


Рис. 2. Срединная линия в деформированном состоянии

Вектор $\bar{\tau}_1$ — касательный к срединной линии, $\bar{\tau}_2$ — нормаль к срединной линии, $\bar{\tau}_3$ — параллельный декартовому вектору \bar{e}_3 . Связь векторов $\bar{\tau}_i$ ($i = 1, 2, 3$) с начальным декартовым базисом можно записать через угол поворота γ :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_1 &= \cos(\gamma)\bar{e}_1 - \sin(\gamma)\bar{e}_2, \\ \bar{\tau}_2 &= \sin(\gamma)\bar{e}_1 + \cos(\gamma)\bar{e}_2, \\ \bar{\tau}_3 &= \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Радиус-вектор произвольной точки балки в деформированном состоянии можно записать в следующем виде:

$$\bar{R} = \bar{s} + (X_2 + w_2(X_2, X_3))\bar{\tau}_2 + (X_3 + w_3(X_2, X_3))\bar{\tau}_3, \quad (4)$$

где $w_2(X_2, X_3)$, $w_3(X_2, X_3)$ — неизвестные функции, характеризующие перемещения в поперечных сечениях, при этом $w_2|_{X_2=X_3=0} = w_3|_{X_2=X_3=0} = 0$. Далее функции w_2 и w_3 будут фигурировать без указания аргументов.

Найдем зависимость угла поворота γ от координаты X_1 . Пусть длина срединной линии в деформированном состоянии увеличивается в λ раз, а ее радиус кривизны равен ρ (рис. 3).

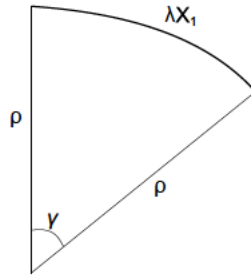


Рис. 3. Определение зависимости угла поворота от продольной координаты

Тогда из формулы для определения длины дуги окружности получаем следующую зависимость:

$$\lambda X_1 = \rho \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(X_1) = \frac{\lambda}{\rho} X_1. \quad (5)$$

Определим радиус-вектор произвольной точки срединной линии в деформированном состоянии. По определению касательный к срединной линии вектор $\bar{\tau}_1$ определяется выражением

$$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{\sqrt{G_{11}^0}} \frac{d\bar{s}}{dX_1} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\bar{s}}{dX_1}. \quad (6)$$

Подставляя (2) и (3) в (6) и учитывая зависимость (5), получаем уравнения для определения компонент перемещений точек срединной линии:

$$\begin{aligned} \frac{du_1^{(0)}}{dX_1} &= \lambda \cos\left(\frac{\lambda X_1}{\rho}\right) - 1, \\ \frac{du_2^{(0)}}{dX_1} &= -\lambda \sin\left(\frac{\lambda X_1}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Начальным условием для уравнений (7) будет служить тот факт, что точка, совпадающая с началом координат в начальном состоянии, перемещаться не будет, то есть

$$\begin{aligned} u_1^{(0)} \Big|_{X_1=0} &= u_2^{(0)} \Big|_{X_1=0} = 0, \\ \frac{du_1^{(0)}}{dX_1} \Big|_{X_1=0} &= \frac{du_2^{(0)}}{dX_1} \Big|_{X_1=0} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая уравнения (7) с начальными условиями (8), получаем вектор перемещений точек срединной линии:

$$\bar{u}^{(0)} = \left(\rho \sin \left(\frac{\lambda}{\rho} X_1 \right) - X_1 \right) \bar{e}_1 + \rho \left(\cos \left(\frac{\lambda}{\rho} X_1 \right) - 1 \right) \bar{e}_2. \quad (9)$$

Из уравнений (7) следует, что изменение длины λ связано с перемещениями срединной линии $u_1^{(0)}$ и $u_2^{(0)}$:

$$\lambda^2 = \left(1 + \frac{du_1^{(0)}}{dX_1} \right)^2 + \left(\frac{du_2^{(0)}}{dX_1} \right)^2. \quad (10)$$

Из (3) и (6) следует, что

$$\sin(\gamma) = -\bar{\tau}_1 \cdot \bar{e}_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\bar{S}}{dX_1} \cdot \bar{e}_2 = -\frac{1}{\lambda} \left(\bar{e}_1 + \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dX_1} \right) \cdot \bar{e}_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{du_2^{(0)}}{dX_1}, \quad (11)$$

$$\cos(\gamma) = \bar{\tau}_1 \cdot \bar{e}_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{d\bar{S}}{dX_1} \cdot \bar{e}_1 = \frac{1}{\lambda} \left(\bar{e}_1 + \frac{d\bar{u}^{(0)}}{dX_1} \right) \cdot \bar{e}_1 = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{du_1^{(0)}}{dX_1} \right). \quad (12)$$

Продифференцируем (11) по X_1 :

$$\frac{d\gamma}{dX_1} \cos(\gamma) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^2 u_2^{(0)}}{dX_1^2}. \quad (13)$$

Из (13), (5) и (12) получаем, что

$$\frac{\lambda}{\rho} = -\frac{1}{\lambda \cos(\gamma)} \frac{d^2 u_2^{(0)}}{dX_1^2} = -\frac{\frac{d^2 u_2^{(0)}}{dX_1^2}}{1 + \frac{du_1^{(0)}}{dX_1}}. \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что и кривизна $\frac{1}{\rho}$ также зависит от перемещений точек срединной линии:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\frac{d^2 u_2^{(0)}}{dX_1^2}}{\lambda \left(1 + \frac{du_1^{(0)}}{dX_1} \right)}. \quad (14a)$$

Таким образом, по заданным λ и ρ из формулы (9) можно определить перемещения срединной линии и, наоборот, по заданным перемещениям из формул (10) и (14а) можно найти изменение длины и кривизну срединной линии. Отметим, что (9) справедливо лишь в случае чистого изгиба, когда λ и ρ не зависят от X_1 .

Перейдем к определению аффинора деформации Φ . Для этого найдем векторы материального базиса $\bar{\varepsilon}_i = \frac{\partial \bar{R}}{\partial X_i}$:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_1 &= \frac{d\bar{s}}{dX_1} + (X_2 + w_2) \frac{d\gamma}{dX_1} (\cos(\gamma) \bar{e}_1 - \sin(\gamma) \bar{e}_2) = \\ &= \lambda \cos(\gamma) \bar{e}_1 - \lambda \sin(\gamma) \bar{e}_2 + \frac{\lambda}{\rho} (X_2 + w_2) (\cos(\gamma) \bar{e}_1 - \sin(\gamma) \bar{e}_2) = \\ &= \frac{\lambda}{\rho} (\rho + X_2 + w_2) \bar{\tau}_1; \\ \bar{\varepsilon}_2 &= \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right) \bar{\tau}_2 + \frac{\partial w_3}{\partial X_2} \bar{\tau}_3; \\ \bar{\varepsilon}_3 &= \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial X_3}\right) \bar{\tau}_3 + \frac{\partial w_2}{\partial X_3} \bar{\tau}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

По определению аффинор связывает между собой векторы материальной системы в начальном и конечном состояниях:

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{e}_i \cdot \Phi.$$

Тогда компоненты аффинора можно найти из следующего соотношения:

$$\Phi_{ij} = \bar{\varepsilon}_i \cdot \bar{e}_j. \quad (16)$$

Подставляя в (16) найденные ранее векторы материального базиса (15), получаем аффинор деформации Φ в разложении по диадам начального декартова базиса:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\rho} (\rho + X_2 + w_2) \cos(\gamma) & -\frac{\lambda}{\rho} (\rho + X_2 + w_2) \sin(\gamma) & 0 \\ \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right) \sin(\gamma) & \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right) \cos(\gamma) & \frac{\partial w_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial X_3} \sin(\gamma) & \frac{\partial w_2}{\partial X_3} \cos(\gamma) & \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial X_3}\right) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Найдем тензор деформаций ε . По определению тензор ε связан с аффинором деформации следующим соотношением:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\underline{\Phi} \cdot \underline{\Phi}^T - \underline{E} \right).$$

Зная компоненты аффинора (17), определим компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{\rho^2} (\rho + X_2 + w_2)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial X_2}\right)^2 - 1 & \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial X_3} + \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial w_3}{\partial X_2} \\ \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial X_3} + \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial w_3}{\partial X_2} & 0 & \left(1 + \frac{\partial w_3}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial X_3}\right)^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Считая деформации в плоскости поперечных сечений малыми, можно пренебречь вторыми и более степенями перемещений w_2 , w_3 и их производных по сравнению с первыми степенями. Полагаем также, что толщина балки мала и $1 + \frac{h_0}{\rho} \simeq 1$. Кроме того $\lim_{X_2 \rightarrow 0} \frac{w_2}{X_2} = 0$, тогда перемещения w_2 будут малы по сравнению с X_2 , то есть $X_2 + w_2 \simeq X_2$. В этом случае линеаризованный тензор ε будет иметь компоненты:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{(0)} + \frac{X_2}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial X_2} & \frac{\partial w_2}{\partial X_3} + \frac{\partial w_3}{\partial X_2} \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial X_3} + \frac{\partial w_3}{\partial X_2} & \frac{\partial w_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{1}{2} [\lambda^2 - 1]$.

Ранее уже были записаны радиус-вектор произвольной точки \bar{R}_0 в начальном состоянии (1) и радиус-вектор \bar{R} этой же точки в деформированном состоянии (4). Тогда, используя эти векторы, можно записать вектор поля перемещений. По определению вектор перемещения записывается в виде

$$\bar{u} = \bar{R} - \bar{R}_0. \quad (19)$$

Подставляя (1) и (4) в (20), а также учитывая найденный вектор перемещений точек срединной линии (9), получаем вектор перемещений \bar{u} :

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \left[(\rho + X_2 + w_2) \sin \left(\frac{\lambda X_1}{\rho} \right) - X_1 \right] \bar{e}_1 + \\ & + \left[(\rho + X_2 + w_2) \cos \left(\frac{\lambda X_1}{\rho} \right) - \rho - X_2 \right] \bar{e}_2 + w_3 \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Напряжения разложим по базису $\bar{\tau}_i$:

$$\underline{S} = \sigma_{ii} \bar{\tau}_i \bar{\tau}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Так как $\frac{\partial w_i}{\partial X_j} \ll 1$, из (15) получаем, что

$$\bar{\varepsilon}_1 \simeq \lambda \bar{\tau}_1, \quad \bar{\varepsilon}^1 \simeq \frac{1}{\lambda} \bar{\tau}_1, \quad \bar{\varepsilon}_2 \simeq \bar{\varepsilon}^2 = \bar{\tau}_2, \quad \bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}^3 = \bar{e}_3. \quad (22)$$

Далее запишем условие равновесия:

$$\bar{\nabla} \cdot \underline{S} = \bar{0}, \quad (23)$$

где $\bar{\nabla} = \bar{\varepsilon}^i \cdot \frac{\partial}{\partial X_j}$.

Подставляя тензор напряжений (18) в условие равновесия (23) и учитывая соотношения (22), получаем следующие уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} - \frac{1}{\rho} \sigma_{11} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Из первого уравнения получаем, что $\sigma_{11} = \sigma_{11}(X_2, X_3)$, а третье уравнение удовлетворяется условием $\sigma_{33} = 0$.

Полагаем, что «повернутый» тензор напряжений

$$\underline{S}_R = \sigma_{ii} \bar{\tau}_i \bar{\tau}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

связан с тензором малых деформаций законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})), \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})), \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{11})), \end{aligned} \quad (25)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij}$ — первый инвариант тензора напряжений.

Далее из обобщенного закона Гука (25) выразим напряжения через деформации и представим их в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{11} &= \varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}, \\ \widehat{\sigma}_{22} &= \varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11},\end{aligned}\tag{26}$$

и подставим их во второе уравнение системы (24):

$$\frac{\partial}{\partial X_2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) - \frac{1}{\rho} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = 0.\tag{27}$$

Используя компоненты тензора деформаций (18) запишем уравнение (27) через искомую функцию w_2 :

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial X_2^2} + \frac{\nu}{\rho} \left(1 - \frac{\partial w_2}{\partial X_2} \right) - \frac{X_2}{\rho^2} - \frac{\varepsilon_{11}^{(0)}}{\rho} = 0.\tag{28}$$

В силу малых деформаций $1 - \frac{\partial w_2}{\partial X_2} \simeq 1$, и условие равновесия принимает вид

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial X_2^2} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{X_2}{\rho} + \varepsilon_{11}^{(0)} - \nu \right).\tag{29}$$

Дважды интегрируя (29) по X_2 , получаем

$$w_2 = \frac{X_2^3}{6\rho^2} + \frac{X_2^2}{2\rho} \left(\varepsilon_{11}^{(0)} - \nu \right) + C_1(X_3) X_2 + C_2(X_3).\tag{30}$$

Так как $w_2|_{X_2=X_3=0} = 0$, то

$$C_2(X_3) = 0.\tag{31}$$

Постоянную $\varepsilon_{11}^{(0)}$ и функцию $C_1(X_3)$ определяем из условия равенства нулю напряжений на поверхности $X_2 = \pm \frac{h_0}{2}$:

$$\widehat{\sigma}_{22}|_{X_2=\pm \frac{h_0}{2}} = 0.\tag{32}$$

Из (25) и (27) получаем, что распределение напряжений в безразмерном виде:

$$\widehat{\sigma}_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial X_2} + \nu \left(\varepsilon_{11}^{(0)} + \frac{X_2}{\rho} \right),\tag{33}$$

где $\widehat{\sigma}_{22} = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{22}$.

Подставляя (30) в (33), получаем

$$\widehat{\sigma}_{22} = \frac{X_2^2}{2\rho^2} + \varepsilon_{11}^{(0)} \left(\frac{X_2}{\rho} + \nu \right) + C_1(X_3).\tag{34}$$

Используя условие (32) и закон распределения (34), определяем искомые неизвестные:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = 0, \quad C_1 = -\frac{h_0^2}{8\rho^2}. \quad (35)$$

Закон распределения напряжений с учетом (35) принимает вид

$$\hat{\sigma}_{22} = \frac{X_2^2}{2\rho^2} - \frac{h_0^2}{8\rho^2}. \quad (36)$$

Подставляя (31) и (35) в (30), окончательно находим неизвестную функцию w_2 :

$$w_2 = \frac{X_2^3}{6\rho^2} - \nu \frac{X_2^2}{2\rho} - \frac{h_0^2}{8\rho^2} X_2. \quad (37)$$

Вернемся к третьему равенству (35), принимая во внимание, что $\sigma_{33} = 0$:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})}{E}. \quad (38)$$

Из (38) выразим распределение напряжений σ_{11} и перейдем к безразмерному виду:

$$\hat{\sigma}_{11} = -\hat{\sigma}_{22} - \frac{1 - \nu^2}{\nu} \varepsilon_{33}, \quad (39)$$

где $\hat{\sigma}_{ii} = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{ii}$, $i = 1, 2$.

Подставляя закон распределения (36) и компоненту ε_{33} из (18), получаем уравнение

$$\hat{\sigma}_{11} = -\frac{X_2^2}{2\rho^2} + \frac{h_0^2}{8\rho^2} - \frac{1 - \nu^2}{\nu} \frac{\partial w_3}{\partial X_3}. \quad (40)$$

Далее подставим первое равенство из (26) в (40) и используем найденные компоненты тензора деформаций (18):

$$\frac{\partial w_3}{\partial X_3} = \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \left[\nu \frac{\partial w_2}{\partial X_2} + \frac{X_2^2}{2\rho^2} + \frac{X_2}{\rho} - \frac{h_0^2}{8\rho^2} \right]. \quad (41)$$

Подставляя (37) в уравнение (41), получаем окончательно уравнение для нахождения неизвестной w_3 :

$$\frac{\partial w_3}{\partial X_3} = \frac{\nu}{\nu^2 - 1} \left[\frac{X_2^2}{2\rho^2} (\nu + 1) - \frac{X_2}{\rho} (\nu^2 - 1) - \frac{h_0^2}{8\rho^2} (\nu + 1) \right]. \quad (42)$$

Интегрируя (42) по X_3 , получаем искомую функцию w_3 :

$$w_3 = \frac{\nu X_3}{2\rho^2 (\nu - 1)} \left[X_2^2 + 2\rho (1 - \nu) X_2 - \frac{h_0^2}{4} \right] + C(X_2). \quad (43)$$

Из условия $w_3|_{X_2=X_3=0} = 0$ следует, что

$$C(X_2) = 0,$$

а функция (43) будет иметь вид

$$w_3 = \frac{\nu X_3}{2\rho^2(\nu - 1)} \left[X_2^2 + 2\rho(1 - \nu)X_2 - \frac{h_0^2}{4} \right]. \quad (43a)$$

Вернемся к тензору деформаций (18) и определим сдвиговые деформации $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\partial w_2}{\partial X_3} + \frac{\partial w_3}{\partial X_2}$, используя найденные функции (37) и (43a):

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\nu X_3}{\rho^2(\nu - 1)} [X_2 + \rho(1 - \nu)] = -\frac{\nu X_3}{\rho} \left(\frac{X_2}{\rho(1 - \nu)} + 1 \right). \quad (44)$$

Данное решение дает интересный результат: сдвиговые деформации, согласно соотношению (44) в общем случае не равны 0. Это означает, что косинусы углов между волокнами, параллельными в начальном состоянии векторам \bar{e}_2 и \bar{e}_3 , не будут равны 0, то есть они не будут оставаться ортогональными в процессе деформации.

Список литературы

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Маркин А.А. Христич Д.В. Нелинейная теория упругости: учебное пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. 92 с.
3. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
5. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959. 364 с.
6. Харламов А.С. Деформации поперечных сечений балки при ее конечном чистом изгибе // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 138–147.
7. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 256 с.

Маркин Алексей Александрович (markin-nikran@yandex.ru), д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Харламов Алексей Сергеевич (a_kharlamov89@mail.ru), аспирант, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Geometry of cross-sections of the beam at its finite pure bending with considering a shift deformations

A. A. Markin, A. S. Kharlamov

Abstract. A research of the cross-sections movements of a free beam in the course of its finite pure bending. Within the theory of elasticity exact function for the vector of movements for final rotations of the beam's median line and with considering a small deformations of the cross-sections was received. In addition function for definition of shift deformations were found at creation of the decision.

Keywords: beam, pure bending, cross section, finite rotations, theory of elasticity, shift deformations.

Markin Alexey (markin-nikram@yandex.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of department, department of mathematical modelling, Tula State University.

Kharlamov Alexey (a_kharlamov89@mail.ru), postgraduate student, department of mathematical modelling, Tula State University.

Поступила 27.01.2015

Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности *

С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников

Аннотация. Методом конечных элементов решена задача дифракции плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, упругий сфероид, неоднородное покрытие, метод конечных элементов.

Исследование дифракции звуковых волн на упругих сфероидальных телах представляет значительный интерес. Сфероидальной геометрией охватывается большое разнообразие форм. Многие реальные объекты хорошо аппроксимируются телами указанной формы. Дифракция звуковых волн на упругих однородных сфероидах изучалась в ряде работ, например, [1-6]. В [7] рассматривался упругий неоднородный сфероидальный рассеиватель.

Изменение характеристик рассеяния звука упругих тел можно осуществить с помощью покрытий в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Дифракция звуковых волн на цилиндрических, сферических и сфероидальных упругих однородных телах с непрерывно-неоднородными покрытиями исследовалась в [8-14]. При этом полагалось, что упругие тела находятся в безграничном пространстве.

В настоящей работе рассматривается задача дифракции плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии плоской подстилающей поверхности.

Пусть упругий однородный изотропный сфероид с полуосью вращения a и второй полуосью b произвольным образом располагается в идеальной сжимаемой жидкости вблизи плоской подстилающей поверхности Π (акустически мягкой или абсолютно жесткой). Материал сpherоида характеризуется плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1, μ_1 . Сфероид имеет покрытие

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97514-р_центр_а) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.1333.2014К).

в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя толщиной h . Материал покрытия характеризуется плотностью ρ и модулями упругости λ, μ , являющимися непрерывными функциями координат. Окружающая сфероид жидкость имеет равновесную плотность ρ_0 и скорость звука c_0 .

Выберем основную прямоугольную систему координат x, y, z так, чтобы ось x лежала на поверхности Π , а ось z была направлена вверх по нормали к плоскости. При этом центр сфероида находится на оси z , а ось вращения сфероида лежит в плоскости xz . Свяжем с прямоугольной системой x, y, z сферическую систему координат r, θ, φ .

Пусть из внешнего пространства на упругий сфероид падает плоская звуковая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k}^1 (рис. 1).

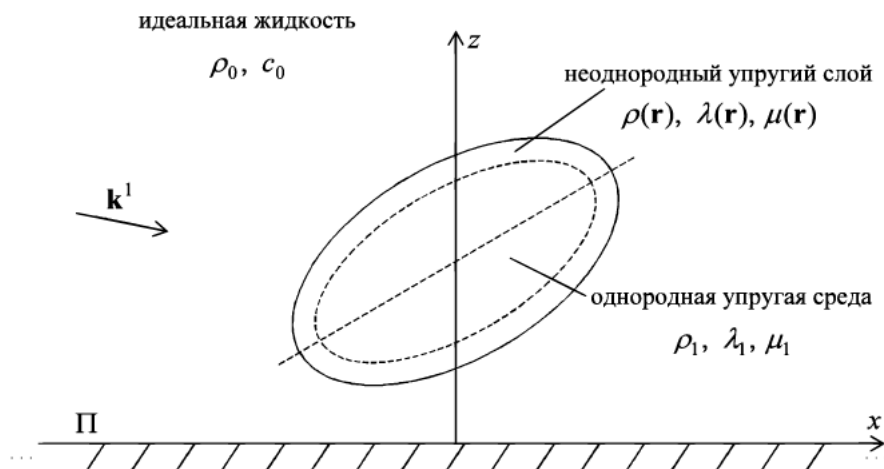


РИС. 1. Геометрия задачи

На рис. 1 показано осевое сечение сфероидального препятствия T . Пунктиром обозначены граница однородного упругого сфероида и неоднородного покрытия, а также ось вращения сфероида.

Потенциал скоростей падающей волны в системе координат x, y, z имеет вид

$$\Psi_0^1 = A_0 \exp[i(\mathbf{k}^1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)],$$

где A_0 — амплитуда волны; ω — круговая частота; t — время; $\mathbf{k}^1 = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k \cos \theta_0)$; $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $k = \frac{\omega}{c_0}$ — волновое число внешней среды; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы волнового вектора падающей волны; в дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Падающая плоская волна будет рассеиваться сфероидом и отражаться плоскостью. При этом будет иметь место многократное переотражение волн между плоскостью и телом.

Определим акустическое поле вне сфероида, а также найдем поля смещений в однородном сфероиде и неоднородном слое.

Поставленную задачу решим путем замены плоской границы на дополнительный рассеивающий объект T' , который представляет собой такой же сфероид, что и T , но расположенный симметрично относительно плоскости $z = 0$. При такой замене приходим к задаче о дифракции звука на двух идентичных телах.

Если подстилающая поверхность является абсолютно жесткой, то граничное условие на такой поверхности заключается в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости. Учитывая, что скорость частиц жидкости во внешней области $\mathbf{v} = \text{grad}\Psi$, где Ψ — потенциал скоростей полного акустического поля, будем иметь

$$\left. \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Если подстилающая поверхность является акустически мягкой, то граничное условие на плоскости заключается в равенстве нулю акустического давления. Учитывая, что акустическое давление во внешней области $p = i\rho_0\omega\Psi$, получаем

$$\Psi(x, y, z)|_{z=0} = 0.$$

При этом $\Psi = \Psi_0^1 + \Psi_s$, где Ψ_s — потенциал скоростей рассеянной волны.

Исключим из рассмотрения плоскую границу, вводя второй рассеиватель, являющийся зеркальным отражением исходного, и вторую падающую плоскую волну, распространяющуюся в направлении волнового вектора \mathbf{k}^2 . Причем вектор \mathbf{k}^2 является зеркальным отражением вектора \mathbf{k}^1 относительно плоскости (рис. 2).

В случае абсолютно жесткой плоскости потенциал скоростей второй падающей плоской волны должен быть

$$\Psi_0^2 = A_0 \exp[i(\mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{r})],$$

где $\mathbf{k}^2 = (k \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k \sin \theta_0 \sin \varphi_0, -k \cos \theta_0)$.

В случае акустически мягкой плоскости потенциал скоростей второй падающей плоской волны должен быть

$$\Psi_0^2 = -A_0 \exp[i(\mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{r})].$$

Тогда граничные условия на плоскости $z = 0$ будут удовлетворяться автоматически.

Таким образом, исходную задачу свели к задаче дифракции двух плоских волн на двух идентичных телах, находящихся в безграничном пространстве Ω_0 , заполненном однородной идеальной жидкостью.

В силу линейной постановки задачи следует найти решение задачи дифракции каждой из двух плоских волн на двух сфероидах, а затем полученные результаты просуммировать.

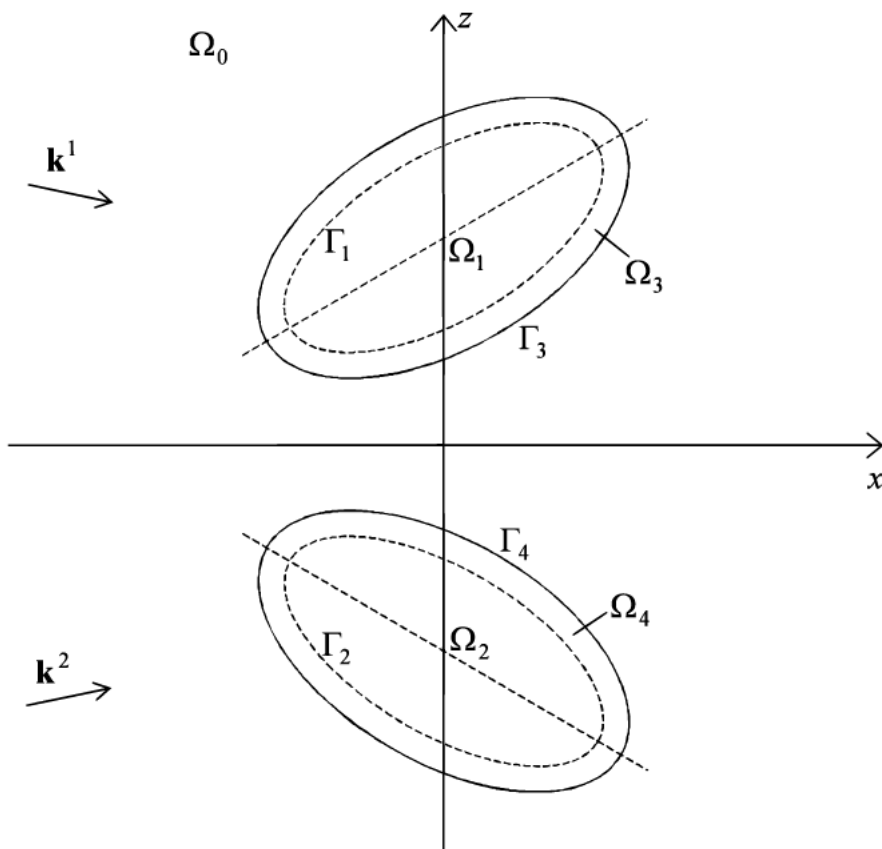


Рис. 2. К задаче дифракции плоской волны на двух телах

Рассмотрим математическую постановку задачи о дифракции плоской звуковой волны Ψ_0 на двух однородных упругих сфероидах с непрерывно-неоднородными покрытиями.

Введем локальные прямоугольные системы координат x_{+1}, y_{+1}, z_{+1} и x_{-1}, y_{-1}, z_{-1} , связанные со сфероидами. Оси z_{+1} и z_{-1} являются осями вращения сфероидов. Центры локальных систем координат O_{+1} и O_{-1} находятся на оси z основной системы координат. Плоскости x_{+1}, z_{+1} и x_{-1}, z_{-1} совпадают с плоскостью x, z .

Свяжем с локальными прямоугольными системами сферические системы координат r_q, θ_q, φ_q ($q = \pm 1$). В этих координатных системах уравнения однородных сфероидов имеют вид

$$r(\theta_q) = a(1 - e \sin^2 \theta_q)^{-1/2} \quad (q = \pm 1).$$

Причем для вытянутого сфероида $e = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$, $\varepsilon = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{1/2}$, а для сплюснутого сфероида $e = \varepsilon^2$, $\varepsilon = (1 - \frac{a^2}{b^2})^{1/2}$, где ε — эксцентриситет сфероида.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости Ω_0 в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [15]:

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_s. \quad (1)$$

Уравнение Ламе, описывающее распространение малых возмущений в упругих однородных изотропных сфероидах при отсутствии массовых сил в случае установившегося режима движения, имеет вид [16]

$$(\lambda_1 + \mu_1)\text{grad div}\mathbf{u}^{(1)} + \mu_1\Delta\mathbf{u}^{(1)} = -\rho_1\omega^2\mathbf{u}^{(1)}, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}^{(1)}$ — вектор смещения в однородной части рассеивателя T (в области Ω_1). В однородной части рассеивателя T' (в области Ω_2) уравнения движения будут иметь аналогичный вид.

Распространение упругих волн в неоднородных покрытиях (областях Ω_3 и Ω_4) описывается общими уравнениями движения сплошной среды, которые в q -й локальной системе координат записываются в виде [16]

$$\frac{\partial\sigma_{1i}}{\partial x_q} + \frac{\partial\sigma_{2i}}{\partial y_q} + \frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z_q} = -\rho\omega u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где u_i и σ_{ji} — компоненты вектора смещения \mathbf{u} и компоненты тензора напряжений в неоднородном слое (индексы 1, 2, 3 соответствуют координатам x_q, y_q, z_q).

Согласно обобщенному закону Гука [16] имеем

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}e, \quad e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (4)$$

где ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера; λ, μ — модули упругости Ламе.

При этом

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_q}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y_q}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z_q}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_q} + \frac{\partial u_2}{\partial x_q} \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_q} + \frac{\partial u_3}{\partial x_q} \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial z_q} + \frac{\partial u_3}{\partial y_q} \right). \end{aligned}$$

Граничные условия на внешней поверхности покрытия Γ_3 (и Γ_4) заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений. На внутренней поверхности неоднородного слоя Γ_1 (и Γ_2) при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения. Имеем

$$\Gamma_3, \Gamma_4: \quad -i\omega u_n = v_n, \quad \sigma_{nn} = -p, \quad \sigma_{n\tau} = 0, \quad \sigma_{n\varphi} = 0, \quad (5)$$

$$\Gamma_1, \Gamma_2: \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(q)}, \quad \sigma_{nn} = \sigma_{nn}^{(q)}, \quad \sigma_{n\tau} = \sigma_{n\tau}^{(q)}, \quad \sigma_{n\varphi} = \sigma_{n\varphi}^{(q)}. \quad (6)$$

Здесь величины с верхним индексом q ($q = \pm 1$) относятся к однородным телам, а без индекса — к неоднородному покрытию.

Таким образом, в математической постановке задача о рассеянии плоской звуковой волны на двух телах состоит в нахождении решений уравнений (1), (2), (3), удовлетворяющих граничным условиям (5), (6). Кроме того, потенциал рассеянных скоростей в рассеянной волне Ψ_s должен удовлетворять условиям излучения на бесконечности.

Заметим, что в общем случае зависимостей $\rho(\mathbf{r})$, $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ для неоднородного покрытия аналитическое решение поставленной задачи невозможно. Значительно усложняется поиск аналитического решения и тем, что граничные поверхности Γ_3 , Γ_4 не являются координатными поверхностями ортогональных систем координат.

Будем решать сформулированную задачу численно с использованием метода конечных элементов (МКЭ) на основе подхода, предложенного в работах [14, 17, 18].

В соответствии с этим подходом в области жидкости, прилегающей к телам T и T' , выделим сферическую поверхность Γ_0 радиуса R . Внутри этой поверхности будет заключена область жидкости Ω'_0 и содержаться упругие тела.

Тогда совокупность областей Ω'_0 , Ω_k ($k=1, 2, 3, 4$) можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны Ψ_0 .

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ.

Потенциал скоростей в совокупном звуковом поле в области Ω'_0 , удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\Psi_1 + k^2\Psi_1 = 0, \quad (7)$$

аналогичному (1), будем искать в виде

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где ψ_k — узловые значения потенциала в области Ω'_0 ; $f_k(\mathbf{r})$ — координатные функции конечно-элементной модели; K — количество узлов.

На границе неоднородного сферического препятствия Γ_0 (граница двух идеальных жидкостей) должны выполняться условия совпадения давлений и нормальных скоростей, которые с учетом выражения через потенциалы могут быть записаны в виде:

$$\Psi_1|_{\Gamma_0} = \Psi_0 + \Psi_s, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial\Psi_1}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\Gamma_0} = \frac{\partial(\Psi_0 + \Psi_s)}{\partial\mathbf{n}}, \quad (10)$$

где \mathbf{n} — направление внешней нормали к границе Γ_0 .

В форме, аналогичной (8), будем искать и смещение в упругой части препятствия (в областях $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$):

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K U_k f_k(\mathbf{r}). \quad (11)$$

При этом для всех упругих областей будем использовать как более общие уравнения вида (3), которые справедливы для любой упругой среды.

Схема разбиения области неоднородного препятствия $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ представлена на рис. 3.

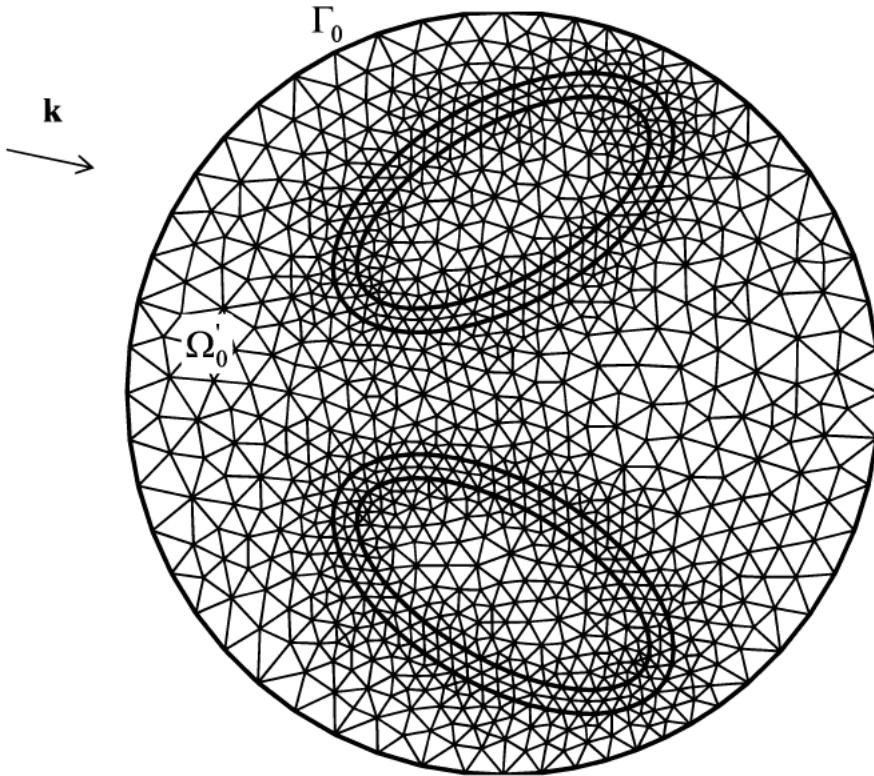


Рис. 3. Схема разбиения на конечные элементы области Ω

В качестве конечных элементов использовались тетраэдры, на которые разбивались все подобласти Ω . В каждом таком тетраэдре V с вершинами (узлами) P_0, P_1, P_2, P_3 вводится локальная система координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ такая, что координаты вершин равны соответственно $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Тогда линейные координатные функции $f_k(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ принимают вид:

$$f_0 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3, \quad f_1 = \zeta_1, \quad f_2 = \zeta_2, \quad f_3 = \zeta_3,$$

где индексы у f соответствуют локальной нумерации узлов в конечном элементе V , т.е. вершинам P_0, P_1, P_2, P_3 .

Если в этом же конечном элементе V строятся координатные функции второй степени, то наряду с узлами P_k ($k = 0, \dots, 3$) вводятся еще 6 промежуточных узлов P_k ($k = 4, \dots, 9$) с локальными координатами $(0.5, 0, 0)$, $(0, 0.5, 0)$, $(0, 0, 0.5)$, $(0, 0.5, 0.5)$, $(0.5, 0, 0.5)$, $(0.5, 0.5, 0)$ соответственно. Тогда квадратичные координатные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 - 3(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + 2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) + 4(\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3), \\ f_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), \quad f_2 = \zeta_2(2\zeta_2 - 1), \quad f_3 = \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \\ f_4 &= 4\zeta_1(1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3), \quad f_5 = 4\zeta_2(1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3), \\ f_6 &= 4\zeta_3(1 - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3), \quad f_7 = 4\zeta_2\zeta_3, \quad f_8 = 4\zeta_1\zeta_3, \quad f_9 = 4\zeta_1\zeta_2. \end{aligned}$$

Во внешней области содержащей жидкости потенциал скоростей рассеянной волны будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам с учетом условий излучения

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im(\varphi - \varphi_0)}, \quad (12)$$

где $h_n(x)$ — сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n ; $P_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m ; A_{nm} — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Разложим также по сферическим гармоникам и потенциал скоростей в падающей плоской волне

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{nm} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (13)$$

где $\gamma_{nm} = A_0 \frac{i^n (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) e^{-im\varphi_0}$.

Подставляя (8), (12), (13) в граничное условие (9) и используя ортогональность сферических гармоник, получим выражения A_{nm} через узловые значения ψ_k на поверхности Γ_0 . Затем подставим выражение для A_{nm} в граничное условие (10).

В результате граничные условия (5), (6), (10) будут содержать неизвестные узловые значения из ограниченной области Ω .

В соответствии с технологией МКЭ непрерывные уравнения (3) и (7) вместе с граничными условиями должны быть заменены дискретными аналогами для неизвестных $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_K)$ и $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K)$. Покажем, как выполняется эта замена на примере уравнений (3).

Представим закон Гука (4) в виде непосредственной связи между тензором напряжений σ и вектором смещений \mathbf{u} :

$$\sigma = C \cdot \nabla \mathbf{u},$$

где $\nabla \mathbf{u}$ — тензор ковариантной (полной) производной вектора \mathbf{u} , а C — тензор 4-го ранга, составленный из модулей упругости Ламе так, чтобы

выполнялись связи (4).

Например,

$$(C_{11ij}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad (C_{12ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения (3) для одной из упругих подобластей D могут быть записаны в векторной форме так:

$$\nabla \cdot (C \cdot \nabla \mathbf{u}) + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0. \quad (14)$$

Граничные условия (5), (6) для границы Γ области D также представим в векторной форме:

$$\mathbf{n} \cdot (C \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{g}, \quad (15)$$

$$h\mathbf{u} = \mathbf{r}, \quad (16)$$

где для условий (5):

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \sigma_{n1}^* \\ \sigma_{n2}^* \\ \sigma_{n3}^* \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_2^* \end{pmatrix};$$

а для (6) — $\mathbf{g} = p^* \mathbf{n}$, $h = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathbf{r} = i/\omega \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}$; значком * помечены неизвестные величины из смежных с D подобластей препятствия.

Модифицируем условие (17), введя в правую часть дополнительное слагаемое так:

$$\mathbf{n} \cdot (C \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{g} - h^T \bar{\lambda}, \quad (17)$$

где $\bar{\lambda}$ — вектор дополнительных неизвестных на границе Γ , которые в точном решении задачи должны обращаться в 0.

Узловые значения \mathbf{U} в разложении вектора смещения по координатным функциям (11) будем искать в соответствии с методом Галеркина [19]. Для этого умножим уравнения (14), (17), (16) на координатную функцию $f(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по соответствующей области. Получим

$$\int_D f [\nabla \cdot (C \cdot \nabla \mathbf{u}) + \rho\omega^2 \mathbf{u}] dV = 0, \quad (18)$$

$$\int_\Gamma f [\mathbf{n} \cdot (C \cdot \nabla \mathbf{u}) + h^T \bar{\lambda} - \mathbf{g}] dS = 0, \quad (19)$$

$$\int_\Gamma f [h\mathbf{u} - \mathbf{r}] dS = 0, \quad (20)$$

где dV — элемент объема D , dS — элемент поверхности Γ .

Используя формулу тензорного анализа

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F},$$

уравнение (18) приведем к виду

$$\int_D \nabla \cdot (fC \cdot \nabla \mathbf{u}) dV - \int_D \nabla f \cdot (C \cdot \nabla \mathbf{u}) dV + \int_D f \rho \omega^2 \mathbf{u} dV = 0. \quad (21)$$

Первый интеграл в полученном уравнении на основе формулы Гаусса-Остроградского запишем в виде интеграла по поверхности от потока вектора $fC \cdot \nabla \mathbf{u}$:

$$\int_{\Gamma} (fC \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

который, в свою очередь, на основе (19) представим в виде

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{g} - h^T \bar{\lambda}) dS. \quad (22)$$

Заменяя выражение первого интеграла в (21) на (22), вместо уравнения (21) получим

$$\int_D [\nabla f \cdot (C \cdot \nabla - f \rho \omega^2 \mathbf{u})] dV + \int_{\Gamma} f h^T \bar{\lambda} dS = \int_{\Gamma} f \mathbf{g} dS. \quad (23)$$

Подставляя в уравнения (23), (20) разложение неизвестных по координатным функциям и вычисляя соответствующие интегралы для всех координатных функций, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} M \mathbf{U} + N^T \mathbf{\Lambda} &= G, \\ N \mathbf{U} &= R. \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, если бы не были введены дополнительные неизвестные $\bar{\lambda}$, то система (24) была бы переопределенной.

Уравнение и граничные условия для потенциала Ψ_1 в области Ω'_0 также могут быть приведены к форме, соответствующей (14)-(16). Выполняя их преобразования, аналогичные проделанным выше, получим систему

$$\begin{aligned} M_0 \mathbf{\Psi} + N_0^T \mathbf{\Lambda}_0 &= G_0, \\ N_0 \mathbf{\Psi} &= R_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Объединяя уравнения вида (24) для всех подобластей с упругой средой и (25), получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить коэффициенты ψ_k и \mathbf{U}_k в разложениях (8), (11).

По найденным ψ_k на Γ_0 определяются коэффициенты A_{nm} и, следовательно, рассеянное акустическое поле вне поверхности Γ_0 , а по \mathbf{U}_k согласно (11) находятся поля смещений в упругом препятствии и неоднородном покрытии.

Список литературы

1. *Flax L., Dragonette L., Varadan V.K., Varadan V.V.* Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1982. V.71. № 5. P.1077-1082.
2. *Клещев А.А.* Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей // *Акуст. журн.* 1986. Т.32. Вып.2. С.268-271.
3. *Hackman R.H., Sammelmann G.S., Williams K.L., Trivett D.H.* A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V.83. № 4. P.1255-1266.
4. *Рождественский К.Н., Толоконников Л.А.* О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // *Акуст. журн.* 1990. Т. 36. Вып. 5. С. 927-930.
5. *Толоконников Л.А.* Дифракция звуковых волн на упругом сфероиде с малым эксцентриситетом в вязкой среде // *Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 152-157.
6. *Клещев А.А.* Резонансное рассеяние звука на упругих сфероидальных телах и оболочках // *Акуст. журн.* 2014. Т. 60. № 3. С. 253-261.
7. *Толоконников Л.А., Лобанов А.В.* Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом сфероиде // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.* 2011. Вып. 2. С. 176-191.
8. *Толоконников Л.А.* Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.* 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 265-274.
9. *Толоконников Л.А.* Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.* 2013. Вып. 3. С. 202-208.
10. *Иванов В.И., Скобельцын С.А.* Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.* 2013. Вып.3. С. 179-192.
11. *Толоконников Л.А.* Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // *Прикладная математика и механика.* 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 519-526.
12. *Толоконников Л.А., Родионова Г.А.* Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.* 2014. Вып. 3. С. 131-137.
13. *Толоконников Л.А.* Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием и произвольно расположенной сферической полостью // *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки.* 2014. Вып. 2. С. 181-193.
14. *Скобельцын С.А., Толоконников Л.А.* О дифракции звука на упругом сфероиде с непрерывно-неоднородным покрытием // *Современные проблемы математики, механики, информатики: матер. междунар. науч. конф.* Тула: ТулГУ, 2013. С. 457-464.
15. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

16. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
17. *Скобельцын С.А.* Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Современные проблемы математики механики, информатики: матер. Междунар. науч. конф. Тула: ТулГУ, 2004. С. 135-136.
18. *Иванов В.И., Скобельцын С.А.* Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132-145.
19. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.

Скобельцын Сергей Алексеевич (skbl@rambler.ru), к.ф.м.-н., доцент, кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

Толоконников Лев Алексеевич (tolokonnikovla@mail.ru), д.ф.-м.н., профессор, кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

Diffraction of a plane sound wave by an elastic spheroid with a non-uniform covering in the presence of a spreading surface

S. A. Skobeltsyn, L. A. Tolokonnikov

Abstract. The problem about diffraction of a plane sound wave by an elastic spheroid with an inhomogeneous covering in the presence of a spreading surface is solved by a finite element method.

Keywords: diffraction, sound waves, elastic spheroid, non-uniform covering, finite element method.

Skobeltsyn Sergey (skbl@rambler.ru), candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

Tolokonnikov Lev (tolokonnikovla@mail.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

Поступила 22.01.2015

УДК 539.3:534.26

Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами *

Л. А. Толоконников

Аннотация. Получено аналитическое решение задачи дифракции звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, упругий цилиндр, неоднородное покрытие, плоский волновод.

Исследованию распространения звуковых волн в волноводах, содержащих упругие цилиндрические тела, посвящен ряд работ. Дифракция звуковых волн на сплошном однородном изотропном упругом цилиндре в плоском слое жидкости с абсолютно мягкими границами изучена в [1]. Задача дифракции звука на неоднородном трансверсально-изотропном полом цилиндра в плоском волноводе с акустически мягкими стенками решена в [2]. В работах [3,4] найдены приближенные аналитические решения задач дифракции звуковых волн на неоднородном упругом полом цилиндра в плоских волноводах с акустически мягкими и жесткими стенками при произвольном расположении тела и произвольном распределении источников звука в волноводе. Дифракция звука на однородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины в волноводе с акустически мягкими границами исследована в [5]. Дифракция звуковых волн на упругих цилиндрических телах с непрерывно-неоднородными покрытиями рассматривалась в работах [6,7]. Задача дифракции звуковых волн на сплошном упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами решена в [8].

В настоящей работе находится аналитическое решение задачи дифракции звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием в плоском волноводе с абсолютно жесткими границами.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97514-р_центр_а) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.1333.2014К).

Полагаем, что в плоский волновод с абсолютно жесткими границами помещен бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Ось цилиндра параллельна плоским границам волновода. Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Плотность ρ и модули упругости λ , μ материала неоднородного покрытия являются функциями радиальной координаты. Волновод заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Ее плотность и скорость звука соответственно равны ρ_1 и c .

Систему прямоугольных координат x, y, z выберем так, чтобы ось x была направлена по нижней стенке волновода, ось y — перпендикулярно стенкам, ось z — параллельно оси цилиндра. При этом нижняя стенка соответствует плоскости $y = 0$, верхняя — $y = d$, где d — ширина волновода. Положение оси цилиндра определяется уравнениями $x = X_0$, $y = Y_0$, $-\infty < z < \infty$. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z так, чтобы координатная ось z являлась осью вращения цилиндра.

В волноводе вдоль оси x распространяется гармоническая звуковая волна давления p_0 с круговой частотой ω , возбуждаемая заданным распределением источников звука на сечении волновода, расположенном на расстоянии X_0 от оси цилиндра. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле в волноводе, а также найдем поля смещений в однородном упругом цилиндре и неоднородном покрытии.

Рассматриваемая задача является двумерной. Все искомые величины не зависят от координаты z .

В области $x > 0$ давление первичного поля возмущений может быть представлено совокупностью распространяющихся в направлении оси x собственных волн волновода [1]

$$p_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\gamma_n x} \sin \lambda_n y, \quad (1)$$

где $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}$; $\lambda_n = \frac{\pi n}{d}$; $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число жидкости в волноводе; A_n — заданные амплитуды.

В цилиндрической системе координат, связанной с цилиндром, падающая волна может быть записана следующим образом:

$$p_0(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(kr) e^{im\varphi},$$

где $a_m = i^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i\gamma_n X_0} \sin \left(\lambda_n Y_0 - m \arcsin \frac{\lambda_n}{k} \right)$; J_m — цилиндрическая функция Бесселя порядка m .

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости, заполняющей волновод, в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [9]

$$\Delta p + k^2 p = 0,$$

где $p = p_0 + p_s$ — давление полного акустического поля в волноводе, p_s — давление рассеянного цилиндром акустического поля.

Уравнения, описывающие распространение малых возмущений в упругом однородном цилиндре, в случае установившегося режима движения имеют вид [9]

$$\Delta \Psi + k_l^2 \Psi = 0, \quad \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad \operatorname{div} \Phi = 0,$$

где Ψ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения; $k_l = \omega/c_l$ — волновое число продольных упругих волн; $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновое число поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно.

При этом вектор смещения частиц упругого изотропного однородного цилиндра $\mathbf{u}^{(0)} = \operatorname{grad} \Psi + \operatorname{rot} \Phi$.

Так как $\Phi = \Phi(r, \varphi) \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — единичный вектор координатной оси z , то от векторного уравнения относительно потенциала Φ приходим к одному скалярному уравнению относительно функции $\Phi(r, \varphi)$:

$$\Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0.$$

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды, которые для установившегося режима движения имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho u_\varphi, \end{aligned}$$

где u_r, u_φ — компоненты вектора смещения \mathbf{u} в неоднородном слое в цилиндрической системе координат; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений.

Используя обобщенный закон Гука [10], последнюю систему уравнений запишем через компоненты вектора смещения \mathbf{u} [11]:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \left(\lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \\
 + \frac{1}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_r = 0, \\
 \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda + \mu}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \left(\mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \\
 + \frac{1}{r} \left(\mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \left(-\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_\varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь и далее штрихами обозначено дифференцирование по аргументу.

При этом полагаем, что плотность материала неоднородного покрытия цилиндра $\rho = \rho(r)$ описывается непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости $\lambda = \lambda(r)$ и $\mu = \mu(r)$ — дифференцируемыми функциями координаты r .

Искомые функции $p_s(r, \varphi)$, $\Psi(r, \varphi)$, $\Phi(r, \varphi)$, $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$, являющиеся решениями соответствующих дифференциальных уравнений, должны удовлетворять граничным условиям на стенках волновода и на поверхностях неоднородного слоя.

Граничные условия на абсолютно жестких стенках волновода заключаются в равенстве нулю нормальной скорости частиц жидкости. Учитывая, что нормальная по отношению к границам волновода скорость частиц жидкости $v_y = \frac{1}{i\rho_1\omega} \frac{\partial p}{\partial y}$, получаем следующую запись граничных условий:

$$\left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial y} \right|_{y=d} = 0. \tag{3}$$

Граничные условия на внешней поверхности упругого покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения

$$r = r_1 : \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \tag{4}$$

где $v_r = \frac{1}{i\omega\rho_1} \frac{\partial p}{\partial r}$ — радиальная компонента вектора скорости частиц жидкости.

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$r = r_0 : \quad u_r = u_r^{(0)}, \quad u_\varphi = u_\varphi^{(0)}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^{(0)}. \tag{5}$$

Кроме того, давление p_s должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности по оси x , а потенциалы Ψ и Φ — условию ограниченности.

Граничные условия (4) и (5) запишем через компоненты вектора \mathbf{u} и потенциалы Ψ , Φ [8].

Давление рассеянного акустического поля p_s будем искать в виде потенциала простого слоя:

$$p_s(x, y) = \int_{L_0} \nu_1(x_0, y_0) G(x, y | x_0, y_0) dl_0, \quad (6)$$

где $\nu_1(x_0, y_0)$ — неизвестная функция, описывающая распределение источников поля p_s на внешней поверхности неоднородного покрытия; $G(x, y | x_0, y_0)$ — функция Грина; L_0 — окружность радиуса r_1 с центром в точке (X_0, Y_0) ; $dl_0 = r_1 d\varphi_0$ — элемент контура интегрирования L_0 .

Функция Грина является решением краевой задачи

$$\Delta G + k_1^2 G = -\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G(x, 0 | x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} G(x, d | x_0, y_0) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial G}{\partial r} - ik_1 G \right) = 0, \quad (9)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние между точкой наблюдения (x, y) и источником поля (x_0, y_0) на контуре L_0 ; δ — дельта-функция.

Краевые условия (8) для функции Грина вытекают из граничных условий (3) с учетом разложения (1). Условия (9) получаем из условий излучения на бесконечности для давления p_s .

Решения задачи (7)–(9) получено в [4]. Функция Грина имеет вид

$$G(x, y | x_0, y_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{d(1 + \delta_{0n})\gamma_n} \cos(\lambda_n y) \cos(\lambda_n y_0) e^{i\gamma_n |x - x_0|}, \quad (10)$$

где δ_{0n} — символ Кронекера.

Вводя обозначение $\nu(x_0, y_0) = r_1 \nu_1(x_0, y_0)$ и переходя от декартовых координат x, y к полярным координатам r, φ , выражение (6) запишем в виде

$$p_s(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \nu(\varphi_0) G(r, \varphi | r_1, \varphi_0) d\varphi_0. \quad (11)$$

При этом функция плотности распределения источников ν на внешней поверхности цилиндра зависит только от одной угловой координаты.

Благодаря представлению функции Грина в виде (10) функция p_s , определенная формулой (11), удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничным условиям (3) и условиям излучения на бесконечности.

Таким образом, задача определения рассеянного поля p_s сводится к нахождению функции распределения источников $\nu(\varphi_0)$, обеспечивающей выполнение граничных условий (4) и (5) на поверхностях неоднородного цилиндрического слоя.

Потенциалы Ψ и Φ в однородной части тела, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца, с учетом условия ограниченности будем искать в виде:

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m J_m(k_l r) e^{im\varphi}, \quad (12)$$

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(k_\tau r) e^{im\varphi}. \quad (13)$$

Вектор смещения \mathbf{u} в неоднородном слое является периодической функцией φ с периодом 2π . Поэтому функции $u_r(r, \varphi)$ и $u_\varphi(r, \varphi)$, удовлетворяющие системе уравнений (2), представим рядами Фурье:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{1m}(r) e^{im\varphi}, \quad u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{2m}(r) e^{im\varphi}. \quad (14)$$

Подставляя выражения (14) в уравнения (2), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_{1m}(r)$ и $u_{2m}(r)$ для каждого m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\tilde{A}_m \mathbf{U}_m'' + \tilde{B}_m \mathbf{U}_m' + \tilde{C}_m \mathbf{U}_m = 0, \quad (15)$$

где $\mathbf{U}_m = (u_{1m}(r), u_{2m}(r))^T$; $\tilde{A}_m, \tilde{B}_m, \tilde{C}_m$ — матрицы второго порядка [8].

Представим функцию плотности распределения источников в виде разложения в ряд Фурье:

$$\nu(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\varphi}. \quad (16)$$

Коэффициенты B_m, C_m, b_m разложений (12), (13), (16) и четыре краевых условия для нахождения частного решения системы дифференциальных уравнений (15) подлежат определению из семи граничных условий (4) и (5).

Из граничных условий находим коэффициенты B_m и C_m , выраженные через величины $u_{1m}(r_0)$ и $u_{2m}(r_0)$, и бесконечную систему линейных уравнений относительно неизвестных b_m , правые части которых выражены через величины $u_{1m}(r_1)$ [8]:

$$B_m = [k_\tau r_0 J_m'(k_\tau r_0) u_{1m}(r_0) + im J_m(k_\tau r_0) u_{2m}(r_0)] r_0 / \Delta, \quad (17)$$

$$C_m = [im J_m(k_l r_0) u_{1m}(r_0) - k_l r_0 J_m'(k_l r_0) u_{2m}(r_0)] r_0 / \Delta, \quad (18)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{nm} b_n = f_m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (19)$$

Здесь

$$\Delta = k_l k_\tau r_0^2 J'_m(k_l r_0) J'_m(k_\tau r_0) - m^2 J_m(k_l r_0) J_m(k_\tau r_0),$$

$$\alpha_{nm} = \delta_{nm} - \frac{r_1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\varphi, \varphi_0) e^{in\varphi_0} e^{-im\varphi} d\varphi_0 d\varphi,$$

$$f_m = -\frac{r_1}{\pi} [\omega^2 \rho_1 u_{1m}(r_1) - a_m k J'_m(k r_1)]; \quad M(\varphi, \varphi_0) = \frac{\partial}{\partial r} G(r, \varphi | r_1, \varphi_0) \Big|_{r=r_1}.$$

Кроме того, из граничных условий находим краевые условия, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (15) [8].

После решения каким-либо аналитическим или численным методом построенной краевой задачи по формулам (17) и (18) вычисляются коэффициенты B_m и C_m , а бесконечная система (19) решается методом усечения [12].

В результате получаем аналитические описания волновых полей в волноводе, в однородном цилиндре и его неоднородном покрытии.

Список литературы

1. Применение метода интегральных уравнений к задаче о дифракции акустических волн на упругих телах в слое жидкости / В.Е. Белов, С.М. Горский, А.Ю. Зиновьев, А.И. Хилько // Акуст. журн. 1994. Т.40. Вып. 4. С. 548–560.
2. Толоконников Л.А., Садомов А.А. О дифракции звука на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке в слое жидкости // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т.12. Вып. 5. С. 208–216.
3. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полом цилиндре в вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 161–176.
4. Толоконников Л.А., Романов А.Г. Дифракция звуковых волн на неоднородном упругом полом цилиндре в слое жидкости с жесткими границами // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. Вып. 1–2. С. 3–10.
5. Толоконников Л.А. Дифракция звука на трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины в волноводе с акустически мягкими границами // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 154–163.
6. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 265–274.
7. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 179–192.
8. Толоконников Л.А. Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием в плоском волноводе с акустически мягкими границами //

- Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 43–53.
9. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
 10. Новацкий В. Теория упругости. Т.2. М.: Мир, 1975. 872 с.
 11. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
 12. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Толоконников Лев Алексеевич (tolokonnikovla@mail.ru), д.ф.-м.н., профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

**Diffraction of sound waves by an elastic cylinder
with a non-uniform coating in a plane waveguide
with absolutely rigid boundaries**

L. A. Tolokonnikov

Abstract. The analytical solution of the problem of the diffraction of sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating in a plane waveguide with absolutely rigid boundaries is obtained.

Keywords: scattering, sound waves, elastic cylinder, non-uniform coating, plane waveguide.

Tolokonnikov Lev (tolokonnikovla@mail.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

Поступила 18.01.2015

Конечное неизотермическое деформирование резинового шара *

Д. В. Христинич, Ю. В. Астапов

Аннотация. На основе постановки связанной термомеханической задачи исследовано напряженно-деформированное состояние резинового шара в процессе его движения по осесимметричному каналу переменного диаметра под действием внешнего давления в неоднородном поле температур.

Ключевые слова: термомеханика, конечные деформации, связанные краевые задачи, осесимметричные задачи.

В последнее время в огнестрельном оружии стали применяться резиновые пули. Они используются в травматическом оружии, предназначенном для охраны общественного порядка и личной самообороны, а также в боевом оружии, находящемся на вооружении силовых структур. В последнем случае специальные устройства [1] позволяют использовать боевое оружие в качестве оружия травматического действия. В статье [2] представлены результаты математического моделирования процесса функционирования штатного оружия в дополнительном режиме нелетального действия с использованием специальных устройств, обеспечивающих надежность работы автоматики оружия и выполнение требований по травмобезопасности. В этой работе предпринята попытка совместного решения задачи о движении пули по каналу ствола под действием пороховых газов и задачи по определению напряженно-деформированного состояния сферической резиновой пули. Модель деформирования пули при ее движении по каналу ствола построена в рамках линейной теории упругости в предположении о несжимаемости материала пули. Однако из данных о диаметрах пули ($9,3 \pm 0,05$ мм) и внутреннего канала ствола (6 мм) [3] следует, что деформации пули могут составлять до 35 %.

Из приведенной в [4] таблицы, в которой содержатся данные о внутреннем диаметре гильзы и диаметре сферической резиновой пули, следует, что деформации пули, вызванные ее начальным обжатием в снаряженном

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-97501-р_центр_a, 14-01-31138-мол_a, 15-01-01875-a) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 467).

патроне, составляют около 16%. В связи с этим целесообразно определять напряженно-деформированное состояние пули с использованием нелинейных определяющих соотношений, учитывающих конечные величины деформаций.

В рамках постановки связанной краевой задачи конечного деформирования, выполненной в статьях [5–7], численно решена задача о неизотермическом продавливании предварительно обжатого резинового шара через отверстие меньшего диаметра.

В основе численного решения лежит система уравнений связанной задачи нелинейной термоупругости в начальной конфигурации для изотропного тела, полученная в статье [8]. Эта система уравнений включает:

условие равновесного протекания процесса деформирования в вариационной форме

$$\int_{V_0} \left((\underline{U}^{-1}) \cdot \underline{\Sigma}_R \cdot \underline{R} + \underline{U}^{-1} \cdot \dot{\underline{\Sigma}}_R \cdot \underline{R} + \underline{U}^{-1} \cdot \underline{\Sigma}_R \cdot \dot{\underline{R}} \right) \cdot \delta \left(\vec{v} \overset{\circ}{\nabla} \right) dV_0 = \int_{\Sigma_0} \dot{\vec{P}}_0 \cdot \delta \vec{v} d\Sigma_0 + \int_{V_0} \dot{\vec{F}}_0 \cdot \delta \vec{v} dV_0, \quad (1)$$

где $\underline{\Sigma}_R = \sqrt{\frac{G}{g}} \underline{R} \cdot \underline{S} \cdot \underline{R}^{-1}$, \underline{S} — тензор истинных напряжений Коши; G и g — метрические тензоры соответственно в текущий и начальный моменты времени; \underline{U} — левая мера искажений, \underline{R} — ортогональный тензор в полярном разложении аффинора деформаций $\underline{\Phi} = \underline{U} \cdot \underline{R}$; \vec{v} — вектор скорости; \vec{P}_0 и \vec{F}_0 — внешние поля поверхностных и массовых сил соответственно; $\overset{\circ}{\nabla} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ — набла-оператор в отсчетной системе координат;

уравнение нестационарной теплопроводности в вариационной форме

$$\int_{V_0} (3K\alpha\dot{T} + c_\varepsilon\rho_0\dot{T}) \delta\dot{T} dV_0 = - \int_{\Sigma_0} \vec{n}_0 \cdot \vec{q}_0 \delta\dot{T} d\Sigma_0 - \int_{V_0} \lambda \overset{\circ}{\nabla} T \cdot \delta \left(\overset{\circ}{\nabla} \dot{T} \right) dV_0, \quad (2)$$

где c_ε — удельная теплоемкость материала при постоянной деформации, ρ_0 — начальная плотность, λ — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент линейного теплового расширения, K — объемный модуль упругости среды, \vec{q}_0 — вектор теплового потока на границе тела, \vec{n}_0 — единичная внешняя нормаль к поверхности Σ_0 , $\dot{\theta}$ — скорость относительного изменения объема, T — температура;

определяющие соотношения

$$\dot{\underline{\Sigma}}_R = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \dot{\theta} \underline{E} + 2G\dot{\underline{M}} - 3K\alpha(T - T_0)\underline{E}, \quad (3)$$

где M — неголономная мера деформаций, определяемая из дифференциального уравнения [9] $\dot{M} = \frac{1}{2} (\dot{U} \cdot U + U \cdot \dot{U})$, G — модуль сдвига материала; кинематические соотношения

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}, \\ \dot{\Phi} = \overset{\circ}{\nabla} \vec{v}, \\ \dot{U} \cdot U + U \cdot \dot{U} = \left(\overset{\circ}{\nabla} \vec{v} \right) \cdot \Phi^T + \Phi \cdot \left(\vec{v} \overset{\circ}{\nabla} \right), \\ \dot{T} = \frac{dT}{dt}; \end{cases} \quad (4)$$

начальные условия

$$\vec{u}|_{t=t_0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad U|_{t=t_0} = U_0(\vec{x}), \quad \Sigma_R|_{t=t_0} = \Sigma_{R0}(\vec{x}), \quad T|_{t=t_0} = T_0(\vec{x}). \quad (5)$$

Граничные условия статического типа предусматривают задание в каждой точке поверхности Σ_P закона изменения внешних сил как функции времени:

$$\vec{P} = \vec{P}_0(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \Sigma_P \quad \forall t > t_0. \quad (6)$$

При задании граничных условий кинематического типа в каждой точке поверхности Σ_u определяется закон изменения перемещений материальных точек

$$\vec{u} = \vec{u}_0(\vec{x}, t) \quad \vec{x} \in \Sigma_u \quad \forall t > t_0. \quad (7)$$

Предполагается, что функции \vec{P}_0 и \vec{u}_0 дифференцируемы по времени.

Для поля температур рассматриваются условия свободного теплообмена в виде закона Ньютона, заданные на поверхности Σ_T :

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n_0} + a(T - T_e) = 0 \quad \vec{x} \in \Sigma_T \quad \forall t > t_0, \quad (8)$$

где a — коэффициент теплообмена, T_e — температура окружающей среды.

Начально-краевая задача (1)–(8) решается численными методами конечных элементов и пошагового нагружения.

Приведем исходные данные и результаты решения задачи. Радиус шара в недеформированном состоянии $r_0 = 10$ мм. Материал шара изотропный и имеет следующие характеристики: модуль Юнга $E = 8 \cdot 10^6$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$, коэффициент линейного расширения $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$, начальную плотность $\rho_0 = 1,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, удельную теплоемкость $c_\varepsilon = 1,42 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, коэффициент теплопроводности $\lambda_0 = 0,16 \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}}$.

Процесс деформирования шара состоит из двух стадий. На первой стадии происходит осесимметричное обжатие, в результате которого шар помещается внутрь цилиндра радиусом $r_1 = 9$ мм. На второй стадии к шару прикладывается давление p , линейно возрастающее с течением времени.

Схема нагружения шара на второй стадии приведена на рис. 1: $r_1 = 9$ мм, $r_2 = 8,16$ мм, $\beta = 60^\circ$. Начальная температура во всех точках $T_0 = 293$ К. Расчет производился до достижения величины давления, действующего на поверхность Σ_1 образца, $p = 3,36 \cdot 10^6$ Па = $1,176G$ (G — модуль сдвига материала шара) при скорости ее изменения $\dot{p} = 2,4 \cdot 10^7 \frac{\text{Па}}{\text{с}}$.

Граничные условия (6)–(8) при рассматриваемой схеме нагружения принимают вид:

$$\vec{x} \in \Sigma_1 : \quad \vec{P} = -p\vec{n}_0, \quad T_e = 2000\text{К};$$

$$\vec{x} \in \Sigma_2 : \quad v_n = 0, \quad P_\tau = 0, \quad T_e = 293\text{К};$$

$$\vec{x} \in \Sigma_3 : \quad P_0^{(r)} = P_0^{(\varphi)} = P_0^{(z)} = 0, \quad T_e = 293\text{К}.$$

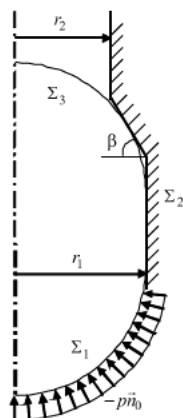


Рис. 1. Схема нагружения резинового шара

Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния резинового шара представлены на рис. 2–5. На этих рисунках показаны распределения напряжений, отнесенных к модулю сдвига G .

До приложения давления (при $p = 0$) в шаре действуют сжимающие напряжения, вызванные его деформациями при помещении шара в цилиндр меньшего радиуса. Наибольшие по модулю напряжения на этой стадии процесса деформирования возникают в экваториальном сечении шара, контактирующем с внутренней поверхностью цилиндра.

При возрастании давления абсолютные значения напряжений в теле увеличиваются, а характер их распределения по сечению шара изменяется.

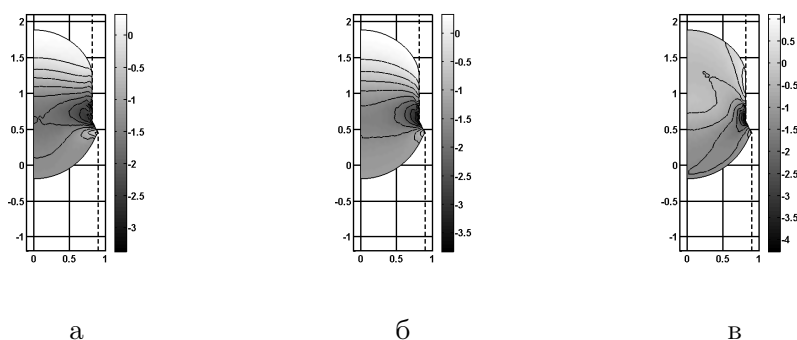


Рис. 5. Распределения напряжений в шаре при $p = 1,176G$:
 а – радиальные напряжения; б – тангенциальные напряжения;
 в – осевые напряжения

Происходит перераспределение напряжений в области контакта тела с конической поверхностью, соединяющей цилиндры с радиусами r_1 и r_2 .

Форма поверхности рассматриваемого деформируемого тела значительно изменяется в процессе его движения внутри цилиндров и усеченного конуса. Величина возникающих напряжений и деформаций существенно зависит от начального радиуса шара и геометрических параметров поверхности Σ_2 .

Приведенное решение задачи позволяет проследить за развитием напряженно-деформированного состояния в упругой сферической пуле на начальном этапе выстрела из травматического оружия.

Список литературы

1. Патрикова Е.Н. Математическое моделирование процесса функционирования табельного оружия в режиме нелетального действия // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. Вып. 11. Ч. 1. С. 33–39.
2. Патрикова Е.Н. Математическая модель процесса функционирования штатного оружия в режиме нелетального действия // Концепт. 2013. Современные научные исследования. Выпуск 1. ART 53224. URL: <http://e-koncept.ru/2013/53224.htm>. Гос. рег. Эл № ФС 77-49965.
3. Патрикова Е.Н. Сравнительный анализ результатов экспериментальных исследований процесса функционирования табельного оружия в режиме нелетального действия // Концепт. 2014. Современные научные исследования. Выпуск 2. ART 54639. URL: <http://e-koncept.ru/2014/54639.htm>. Гос. рег. Эл № ФС 77-49965.
4. Травматический патрон: пат. 2348892 С 1 Российская Федерация; МПК8 F 5/02 / Гринберг М.В. (RU), Кузьменко О.Л. (RU), Соколов В.М. (RU); патентообладатели Гринберг М.В. (RU), Кузьменко О.Л. (RU), Кузьменко Т.Н. (RU), Соколова А.З. (RU), Черновская Н.И. (RU) — № 2007119484/02; заявл. 28.05.2009; опубл. 10.03.2009, Бюл. № 7. 9 с.

5. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Описание конечных деформаций твердых тел в отсчетной конфигурации // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 156–166.
6. Христич Д.В., Астапов Ю.В., Глаголев Л.В. Постановка задачи конечного деформирования анизотропных тел в терминах начальной конфигурации // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 148–157.
7. Христич Д.В., Соколова М.Ю. Решение краевых задач нелинейной термоупругости // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 123–136.
8. Христич Д.В., Астапов Ю.В. Учет взаимного влияния полей напряжений, деформаций и температур при решении задачи Ламе // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 67–73.
9. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Процессы упругопластического конечного деформирования. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. 374 с.

Христич Дмитрий Викторович (dmitrykhristich@rambler.ru), к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Астапов Юрий Владимирович (ast3x3@gmail.com), студент, кафедра математического моделирования, Тульский государственный университет.

Finite non-isothermal deforming of a rubber sphere

D. V. Khristich, Yu. V. Astapov

Abstract. On the basis of coupled thermomechanical problem positing a stress-strain state of a rubber sphere during its movement along an axisymmetric channel of variable diameter under action of outer pressure in inhomogeneous temperature field is investigated.

Keywords: thermomechanics, finite deformations, coupled boundary problems, axisymmetric problems.

Khristich Dmitry (dmitrykhristich@rambler.ru), candidate of physical and mathematical sciences, lecturer, department of mathematical modelling, Tula State University.

Astapov Yuri (ast3x3@gmail.com), student, department of mathematical modelling, Tula State University.

Поступила 10.02.2015

Образование межъямных экситонов в двойных квантовых ямах EuO-SrO-EuO

Ю. Ф. Головнев, Н. Ю. Сомова

Аннотация. Проведен анализ условий образования межъямных экситонов в квантовых магнитных ямах EuO, ограниченных барьерами SrO. Эти полупроводники согласуются по постоянным кристаллической решетки $a \approx 5,144 \text{ \AA}$. Рассмотрена кинетическая модель для циркулярной поляризации σ^+ с учетом туннелирования экситонных электронов.

Ключевые слова: туннелирование, обменный интеграл, релаксация экситонов, эффект Зеемана.

Для понимания механизмов образования триплетных экситонов, обменного взаимодействия и электронной проводимости в европиевых халькогенидах необходим анализ их зонной структуры. Схема энергетических уровней EuO, определенная из оптических и фотоэмиссионных измерений, показывает, что дно зоны проводимости образовано $5d_{t_{2g}}$ -состояниями катионов, а валентная зона получается из $2p$ -орбит анионов. Уникальным фактом следует считать, что в зазоре между ними располагаются $4f$ -уровни, которые находятся, примерно, на 1,1 эВ ниже дна зоны проводимости (рис. 1)[1]. Другими словами, основное ферромагнитное спин — поляризованное состояние уровней $4f$ (\uparrow), шириной 0,57 эВ, расположено в зазоре между анионной зоной (Γ_{15}) и $5d$ -зоной проводимости (X_3) [2].

Теоретические расчеты расщепления d -уровней в кристаллическом поле и эффект красного смещения около 0,5 эВ согласуются с результатами экспериментов [3]. Следует добавить, что энергетическая разница для $4f$ -зон со спином (\uparrow) и со спином (\downarrow) составила 6 эВ. Наинижней $5d$ -зоной проводимости является X_3 , а эффективные массы электронов со спинами (\uparrow) и (\downarrow) равны, соответственно 0,42 и 0,56. EuO имеет высокую намагниченность насыщения 24,1 Гс, что соответствует $7\mu_B$ (μ_B — магнетон Бора) на ион Eu^{2+} и согласуется с величиной для $S_{7/2}$ -состояния. При давлении 85 кбар температура Кюри EuO становится равной 125 К.

Оптическое возбуждение образца EuO рождает на катионе Eu^{2+} триплетный экситон Френкеля малого радиуса. Такие материалы, в которых магнитные катионы легко переводятся в возбужденное состояние, называют

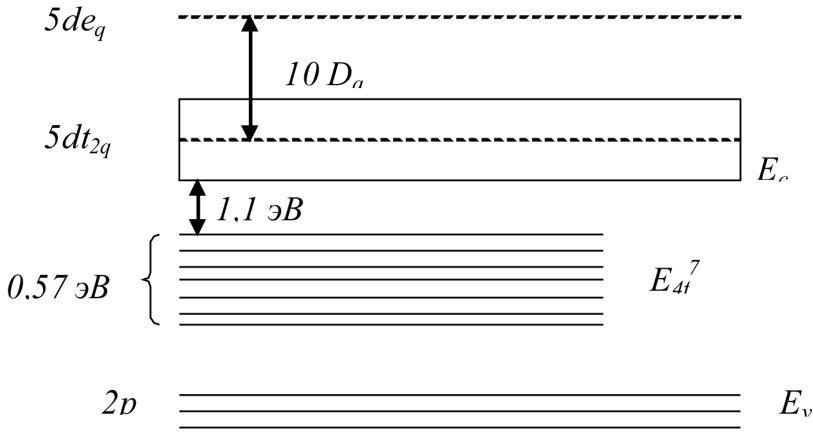


Рис. 1. Схема энергетических уровней EuO: E_c — дно зоны проводимости, E_{4f}^7 — ширина $4f$ -зоны, E_v — потолок валентной зоны, $10D_a$ — расщепление d -уровней в кристаллическом поле

магнитоэкситонными. В двойных квантовых ямах EuO-SrO-EuO, где нанослои EuO и образуют эти ямы, а SrO является барьерами. Полный момент $4f$ -полосы, находящейся в запрещенной зоне E_g ферромагнитного полупроводника EuO, равен $J = 7/2$, так как орбитальный момент $L = 0$. Тогда основным состоянием триплетного экситона, образующегося с минимальной энергией оптического возбуждения, будет экситон на тяжелой дырке в $4f$ -полосе [4]. Благодаря обменному взаимодействию, в квантовой яме EuO действует молекулярное поле $\vec{H}_{\text{эф}}$ [5]:

$$H_{\text{эф}} = -\frac{J_{ie}\bar{S}_e}{\mu_B}, \quad (1)$$

где J_{ie} — обменный интеграл, а \bar{S}_e — среднее значение спина соседних ионов европия в наимизшем состоянии.

Спиновое вырождение основного состояния i -го иона снимается полем $\vec{H}_{\text{эф}}(i)$ вследствие зеемановского расщепления

$$\vec{H}_{\text{эф}}(i) = 2\mu_B\vec{S}_i H_{\text{эф}}(i). \quad (2)$$

Для возбужденного состояния обменный интеграл имеет другое значение

$$H'(i) = E_i + 2\mu_B\vec{S}_i\vec{H}'_{\text{эф}}(i). \quad (3)$$

Здесь E_i — энергия возбуждения экситона в парамагнитной фазе, а $\vec{H}'_{\text{эф}}(i) = -J'_e\bar{S}_e/2\mu_B$. При этом спектральные линии разделяются на две, противоположно поляризованные компоненты σ^+ и σ^- с проекциями полного момента $7/2$ и $5/2$ соответственно [6]. Вклад в спиновое магнитное расщепление связан с обменным взаимодействием между экситонными электронами (дырками) и локализованными магнитными ионами Eu. Это дает спиновое

расщепление порядка ≈ 200 мэВ (гигантский эффект Зеемана), что соответствует положительному фактору электронов g_e и отрицательному фактору дырок g_h . Основное состояние экситона $J = +3$ создается при оптическом переходе с проекцией момента $J_z = -5/2$ и нижним состоянием после этого расщепления с проекцией $S_z = -1/2$ (рис. 2).

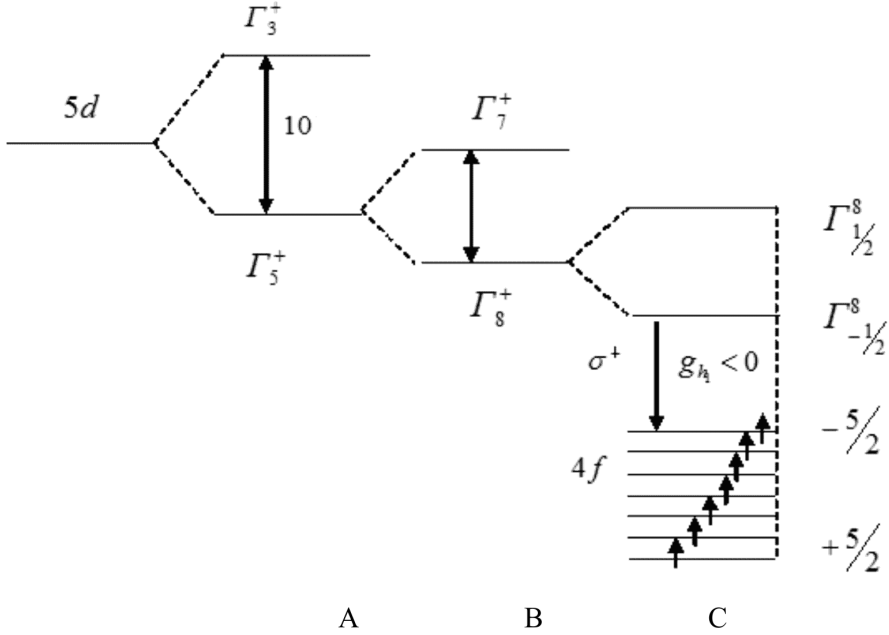


Рис. 2. Схема циркулярно-поляризованных оптических переходов σ^+ при учете эффективного поля $\vec{H}_{эф}$ в магнитной квантовой яме, образуемой нанослоем *EuO*: *A* — расщепление кристаллическим полем *5d*-состояний, *B* — расщепление вследствие спин-орбитального взаимодействия, *C* — расщепления в обменном поле $\vec{H}_{эф}$

Релаксация экситонов (энергетическая и спиновая) будет обусловлена обменным взаимодействием, что должно привести к σ^+ -поляризованной компоненте в экситонном спектре при $\vec{H}_{эф} > 1$ Тл. Это и реализуется в двойной квантовой яме из нанослоев *EuO-SrO* (рис. 3).

В молекулярных полях $\vec{H}_{эф} > 1$ в σ^+ -поляризованных спектрах люминесценции должна наблюдаться только излучательная рекомбинация экситонов из магнитных ям (*EuO*) на низкоэнергетическом крыле линии фотолюминесценции, что и будет свидетельствовать об их сравнительной интенсивности в соседних ямах и об эффективной межъямной релаксации резонансно возбужденных экситонов. Это свидетельствует о межъямной релаксации (туннелировании) экситонов, возбужденных резонансно, и находит объяснение при анализе спиновой и энергетической релаксации в спинзависимом потенциале двойных квантовых ям *EuO-SrO-EuO*. Зонную

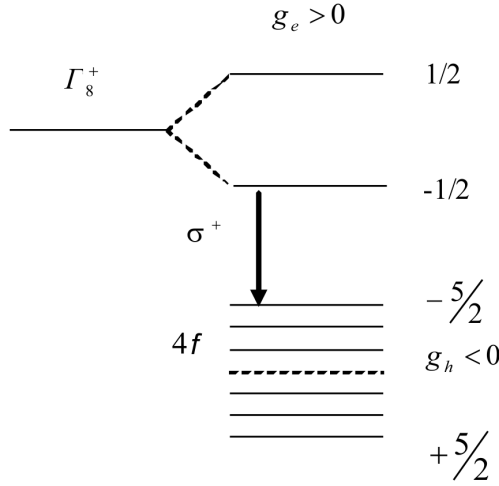


Рис. 3. Схема оптического перехода σ^+ в магнитной квантовой яме

схему этих ям можно аппроксимировать потенциалом прямоугольной формы (рис. 4). Использованное упрощение дает хорошее количественное описание образованию экситонных состояний с глубоким локализирующим потенциалом $V = 2$ эВ. Энергия связи магнитного экситона рассчитывалась с учетом d - f -обменного взаимодействия [7]:

$$E_x = \frac{\hbar^2 k^2}{2(m_e^* + m_h^*)} - \frac{\mu e^2}{2\hbar^2 \epsilon n^2} - \frac{A}{2}(S_e + S_h), \quad (4)$$

$\mu = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*}$ — приведенная масса экситона, A — интеграл d - f -обменного взаимодействия, S_e и S_h — спин электрона и дырки, n — главное квантовое число, ϵ — статическая диэлектрическая проницаемость SrO.

Ближайшие ионы европия соединены t_{2g} -орбиталями, что и понижает энергию $5d$ -состояний на 0,5 эВ. Результаты анализа магнитооптических эффектов в EuO показывает, что линия поглощения похожа на полосы, обусловленные $4f$ - $5d$ -переходами в Eu^{2+} не только по форме и силе осциллятора, но и по другим магнитооптическим параметрам [4].

Если учесть электронно-дырочное обменное взаимодействие и обменную связь экситона с ионами редкоземельного металла, то гамильтониан энергии этого взаимодействия, зависящего от спинов, для слоев EuO получает следующий вид:

$$\hat{H}_{обм} = -A_e S_e - A_h S_h - J_{eh} S_e S_h, \quad (5)$$

$$S_e = 1/2, \quad S_h = 5/2, \quad S_n = 7/2, \quad A_e = 2 \sum_n J_{en} S_n, \quad A_h = 2 \sum_n J_{hn} S_n,$$

$$J_{eh} = 4 \sum_{i>j} J_{ij}.$$

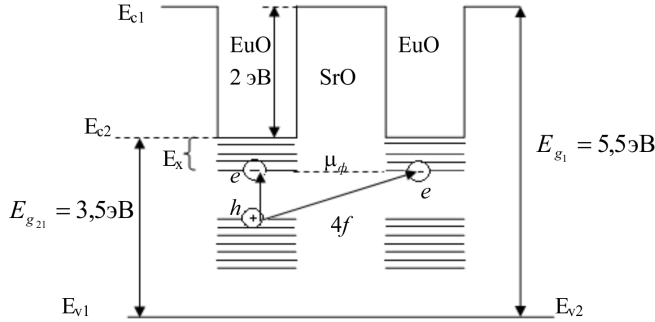


Рис. 4. Схема оптического и туннельного переходов экситонных электронов в двойной яме: μ_f — уровень Ферми, E_{c1} и E_{c2} — дно зоны проводимости SrO и EuO, $E_{v1} = E_{v2}$ — уровни потолка валентных зон равны (по Харрисону), E_x — энергия связи

Энергетические уровни E_i экситона, расщепленные обменным взаимодействием, получим, рассматривая действие гамильтониана (5) в базисе экситонных волновых функций, соответствующих E_1 и E_{14} : $\psi_1 = \left| \vec{k}; \downarrow; -\frac{5}{2} \right\rangle$ и $\psi_{14} = \left| \vec{k}; \uparrow; -\frac{5}{2} \right\rangle$, где \vec{k} — волновой вектор экситона. Из собственных значений гамильтониана (5) наибольший интерес представляют E_1 и E_{14} :

$$E_{1,14} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5}{2} J_{eh} \pm [5A_h + A_e] \right\}. \quad (6)$$

Здесь с учетом боровского радиуса экситона для одного ближайшего узла можно взять $A_e \approx A_h \approx 5 \text{ мэВ}$, $J_{eh} \approx -0,3 \text{ мэВ}$. Тогда из формулы (6) получим $E_1 = 14,62 \text{ мэВ}$ и $E_{14} = -15,38 \text{ мэВ}$. Таким образом, максимальное уширение экситонного спектра из-за косвенного обмена в ферромагнитном слое EuO составляет $\Delta E = 30 \text{ мэВ}$ [8].

Приведенный ниже анализ стационарной кинетической модели населенностей экситонных состояний дает качественное описание поведения интенсивности люминисценции от поляризации возбуждения σ^+ , которую наблюдают в эксперименте, основываясь на физической картине явления. Особенность этой модели в том, что она описывает необратимое туннелирование экситонов в полях $\vec{H}_{эф} > 1 \text{ Тл}$ со временем туннелирования t_{tun} , физически адекватный выбор которого и будет давать качественное описание эксперимента. Наша упрощенная модель только для поляризации σ^+ даст одно уравнение:

$$\frac{dN^+}{dt} = N(\Gamma_{-\frac{1}{2}}^8) - N^+ \left(\frac{1}{t_{tun}} + \frac{1}{t_p} + \frac{1}{t_{cp}} \right), \quad (7)$$

где N^+ — населенности состояний экситонов, $N(\Gamma_{-1/2}^8)$ — скорость генерации экситонов, t_p — время радиации (оно не зависит от $\vec{H}_{эф}$ и равно $\approx 100 \text{ пс}$), t_{cp} — время спиновой релаксации (из экспериментов $t_{cp} \approx 40 \text{ пс}$).

При выполнении резонансных условий туннелирования экситонного электрона, вероятность такого туннелирования «через» локализованные состояния барьера SrO будет определяться формулой Брейта-Вигнера [9]:

$$T_{рез}(\varepsilon - \varepsilon_0) = \frac{\Gamma^2}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (8)$$

где ε_0 — энергия локализованных состояний, Γ — ширина уровня в барьере (его толщина d); Γ зависит от d и радиуса примесного состояния a_0 по формуле:

$$\Gamma \approx \exp(-d/a_0). \quad (9)$$

Если выбрать t_{tun} с минимумом для $\vec{H}_{эф} \approx 1$ Тл, то получим зависимость в виде лоренциана:

$$\frac{1}{t_{tun}} = \frac{\Gamma^2}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \Gamma^2}, \quad \text{где } \Gamma \approx 0,075 \quad (10)$$

Так как разница уровней энергии экситонов в соседних ямах в полях $\vec{H}_{эф} \approx 1$ Тл меньше энергии оптического фона (21 мэВ), то возможным механизмом межъямной релаксации будет рассеяние на дефектах интерфейса. Вероятность такого туннелирования пропорциональна плотности локализованных экситонов и возрастает при приближении ко дну зоны свободных экситонов, что и наблюдают в эксперименте и хорошо описывается лоренцианом (10). Соответствие модельного расчета с постоянным t_{tun} указывает на рассеяние на дефектах интерфейса при туннелировании. Соответствие эксперимента и расчетов при t_{tun} , не зависящих от разницы уровней энергии экситонов в соседних ямах, определяет механизмы туннелирования [10], которыми является рассеяние на дефектах интерфейса.

Расчеты показывают важность экситонных эффектов в процессах межъямной релаксации, а направление туннелирования определяется значением энергии экситонного перехода, а не уровнями энергии одночастичных состояний. Когда экситон в магнитной яме выше по энергии, происходит полная межъямная релаксация в соседнюю яму.

Список литературы

1. Головнев Ю.Ф., Сомова Н.Ю. Фазовая диаграмма ортоэкситонов в нанослое EuO // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 264–270.
2. Редкоземельные полупроводники. Л.: Наука, 1977. 205 с.
3. Метфессель З., Маттис Д. Магнитные полупроводники. М.: Мир, 1972.
4. Головнев Ю.Ф. Наноразмерные ферромагнитные гетеросистемы. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2007.
5. Экситоны / под ред. Э.И. Рашба. М.: Наука, 1985. 616 с.
6. Komarov A. V., Ryabchenko S. M., Terletskaïi O. V. Magneto-optical investigations of the exciton band in CdTe:Mn²⁺ // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. Вып. 2. С. 608–618.

7. Головнев Ю.Ф., Сидорова И.Г. Влияние обменного взаимодействия на спектр экситонов в гетеросистемах EuO-SrO // Труды МФТИ. 2007. С. 8.
8. Головнев Ю.Ф., Лаковцев А.Б., Сидорова И.Г. Коллективные свойства экситонов в наносистеме EuO-SrO // Вестник Адыгейского государственного университета. 2013. Вып. 1. С. 32–35.
9. Глазман Л.И., Шехтер Р.И. Неупругое резонансное туннелирование электронов // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 1. С. 292–306.
10. Релаксация экситонов в полумагнитных асимметричных двойных квантовых ямах / С.В. Зайцев, А.С. Бричкин, П.С. Дорожкин, G. Vacher // ФТП. 2008. Т. 42. Вып. 7. С. 831–845.

Головнев Юрий Филиппович (physics@tspu.tula.ru), д.ф.-м.н., профессор, кафедры общей и теоретической физики, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

Сомова Наталья Юрьевна (somovanalya@mail.ru), аспирант, кафедры общей и теоретической физики, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

Education miyaneh excitons in double quantum wells

Yu. F. Golovnev, N. Yu. Somova

Abstract. The analysis of the conditions of formation miyaneh excitons in magnetic quantum wells EuO , limited barriers SrO . These semiconductors are coordinated on a regular lattice $0 \approx 5,144 \text{ \AA}$. Considered a kinetic model for circular polarization σ^+ taking into account the exciton tunneling of electrons.

Keywords: tunneling, the exchange integral, relaxation of excitons, Zeeman effect.

Golovnev Yury (physics@tspu.tula.ru), doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of the general and theoretical physics, Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University.

Somova Natalia (somovanalya@mail.ru), postgraduate student, department of the general and theoretical physics, Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University.

Поступила 20.01.2015

Анализ данных приборных систем широкополосных градиентометров с помощью метода наложенных эпох *

С. А. Шопин, С. А. Скобельцын

Аннотация. Представлены результаты анализа с помощью метода наложенных эпох временных рядов измерений специальных гравиметрических приборов – широкополосных градиентометров. Показано наличие суточного, годового, сезонного, а также ряда других ритмов в сигналах приборов.

Ключевые слова: широкополосный градиентометр, ритмы, периодограммы, метод наложенных эпох.

В качестве исходных данных для анализа выступают результаты гравиметрических измерений, выполняемых в Тульском государственном университете приборными системами широкополосных градиентометров (ШГМ). Приборные системы разработаны под руководством д-ра техн. наук, проф. О.В. Мартынова и используются при проведении комплексного сейсмопрогнозного мониторинга. С использованием их данных получен ряд интересных результатов в области прогноза землетрясений [1, 2]. С физической точки зрения регистрируемые сигналы представляют собой углы поворота крутильных систем специальной конструкции [1]. С математической точки зрения показания приборных систем представляют собой непрерывный ряд отсчетов нескольких датчиков (каналов), представленных в виде вещественных чисел в диапазоне от -255 до 255. Показания снимаются непрерывно с интервалом от 1 секунды до 0.5 минуты (для отдельных каналов этот шаг фиксирован, но может отличаться в разных каналах).

Для изучения частотной структуры данных измерений системы ШГМ до последнего времени исследовались спектры сигналов системы. Спектральная плотность сигнала определялась с помощью дискретного преобразования Фурье [3].

Альтернатива преобразованию Фурье, которая позволяет выявить периодические составляющие сигнала, предложена в работе [4]. Метод назван

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение №14.577.21.0109, проект RFMEFI57714X0109).

методом наложенных эпох (далее МНЭ), и основная его идея состоит в том, что периодичность составляющих сигнала ищется путем сравнения средних значений в предполагаемых полупериодах периодической составляющей сигнала. Необходимость разработки метода связана с тем, что периодичность в реальных природных процессах часто не возможно корректно отобразить суммой синусоид, используя преобразование Фурье.

В ряде работ, например [8-10], МНЭ использовался при поиске скрытых ритмов в рядах экспериментальных данных. Авторы [11] изучали с помощью этого метода периодическую модуляцию геоэлектромагнитных волн и землетрясений. В работах [5, 6] с помощью МНЭ выполнялся поиск космогеофизических ритмов в результатах измерений гравитационной постоянной, выполняемых на установке О.В. Карагиоза и В.П. Измайлова.

В работе [9] показано, что МНЭ позволяет выделять периодичности, которые не обнаруживаются Фурье-анализом. Прежде всего это относится к квазипериодическим вариациям с сильной изменчивостью амплитуды и формы ритмической составляющей, но (почти) постоянным периодом, а также очень слабым стабильным ритмам с несинусоидальной формой периодичности. Другое преимущество МНЭ состоит в его нечувствительности к наличию перерывов и пропусков в наблюдениях, присутствие которых приводит к различным артефактам при анализе на основе преобразования Фурье. При этом МНЭ вообще не требует периодичности в расположении реперов. Их можно «расставлять» в любые моменты времени, ход процесса относительно которых нас интересует. Таким путем можно исследовать связи явлений и событий, происходящих вообще в случайные моменты времени, например, изменение поведения животных перед землетрясениями.

Для достижения наилучших результатов при применении МНЭ может потребоваться применение специальных приемов и методов предварительной обработки данных (подавление высокочастотных шумов, переход к более редкому опросу данных, анализ формы ритмического компонента и пр.). Выделяемые с помощью МНЭ ритмы, как правило, требуется исследовать дополнительно для надежного доказательства значимости ритма и описания свойств периодической составляющей. К недостатку МНЭ следует отнести и довольно высокие вычислительные расходы, даже по сравнению с классическим Фурье-преобразованием. Но последнее обстоятельство в силу бурного развития вычислительной техники имеет все меньшее значение.

Для реализации экспериментальных наблюдений с помощью МНЭ создана программа обработки рядов, содержащих значения исследуемых параметров и моменты времени измерений, в которой МНЭ применяется к последовательности пробных периодов. Это позволяет строить спектрограммы (периодограммы), подобные получаемым при анализе методом Фурье, но не требующие равных интервалов между измерениями и каких-либо интерполяций. Программа построена на основе следующего алгоритма [6, 12, 13]:

- 1) задание первоначального пробного периода $T = T_0$;

- 2) ограничение длительности ряда таким образом, чтобы в него укладывалось целое число M пробных периодов, $k = 0$;
- 3) вычисление средних значений в каждой из половин периода: S_m^+ и S_m^- ($m = \overline{1, M}$);
- 4) вычисление разницы между средними значениями:

$$d_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (S_m^+ - S_m^-);$$

сдвиг начальной фазы на $1/16$ периода, $k = k + 1$, и если $k < 4$ — переход к п. 3 (повторение п.п. 3, 4, 5 еще 3 раза);

- 6) выбор максимальной разницей между усреднениями и фиксирование этой разницы: $D_T = \max_k \{|d_k|\}$;
- 7) увеличение периода на заданный шаг $T = T + \Delta T$;
- 8) повторение п. 2, 3, ... 7 до тех пор, пока величина периода не достигнет заданного предельного значения.

Выходом алгоритма является набор значений D_T — отсчетов периодограммы для периодов $T_0, T_0 + \Delta T, T_0 + 2\Delta T, \dots$

При совпадении пробного периода с периодом ритмической составляющей сигнала разница между «половинками» при некотором значении фазы становится значительной, что отражается на диаграмме (T, D_T) в виде пика.

Недостаток такой обработки в том, что она порождает ложные пики, соответствующие нечетным гармоникам. Например, при обработке синусоидального сигнала появляются не только пик, соответствующий основному периоду T_0 , но пики с периодами $3T_0, 5T_0$ и т.д. При обработке реальных сигналов этот недостаток компенсируется тем, что амплитуды ритмов обычно снижаются по мере укорочения периодов, в связи с чем при анализе реальных сигналов, содержащих взаимное наложение множества ритмов, проявление ложных субгармоник значительно ослабляется.

На рис. 1 показан пример обработки методом наложенных эпох модельного чисто синусоидального сигнала. По вертикальной оси на приводимых далее графиках отложена величина D_T . На рисунке отчетливо видны пики, соответствующие кратным нечетным гармоникам (третья, пятая).

На рис. 2 показан пример обработки методом наложенных модельного синусоидального сигнала в случае ненулевой начальной фазы колебаний.

При сравнении рис. 1 и 2 видно, что максимальное значение D_T для T_0 на втором меньше. Этого эффекта можно избежать, если п. 3, 4, 5 алгоритма повторять не 4 раза, а 8, в соответствии с числом деления периода (16), но это в 2 раза увеличивает объем вычислений, а качественно несущественно улучшит периодограмму. При выполнении анализа была использована первоначальная версия алгоритма (без модификации).

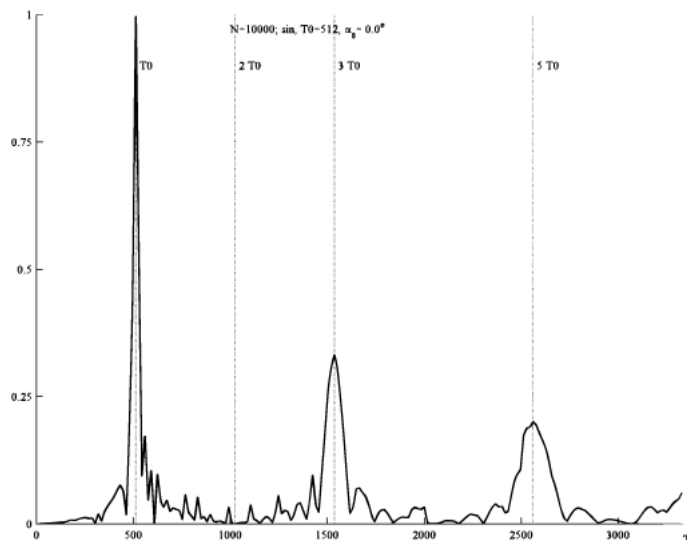


Рис. 1. Применение метода наложенных эпох при совпадении фаз

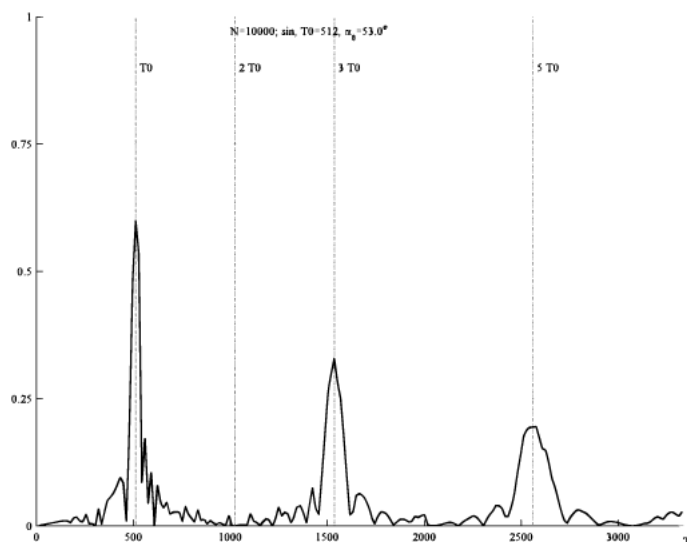


Рис. 2. Применение метода наложенных эпох при несовпадении фаз

На основе алгоритма, изложенного выше, методом наложенных эпох проведен анализ данных приборных систем. Для анализа использовался накопленный архив данных системы ШГМ-3 за период 01.11.2006-14.11.2014.

Общий характер поведения сигналов приборной системы можно увидеть на рис. 3, на котором представлены данные каналов системы ШГМ-3 с сентября 2006 г. по ноябрь 2014 г.

В верхней части рисунка изображены отсчеты 1-го канала, в средней – 2-го канала и в нижней – 3-го канала. Представленные графики показывают

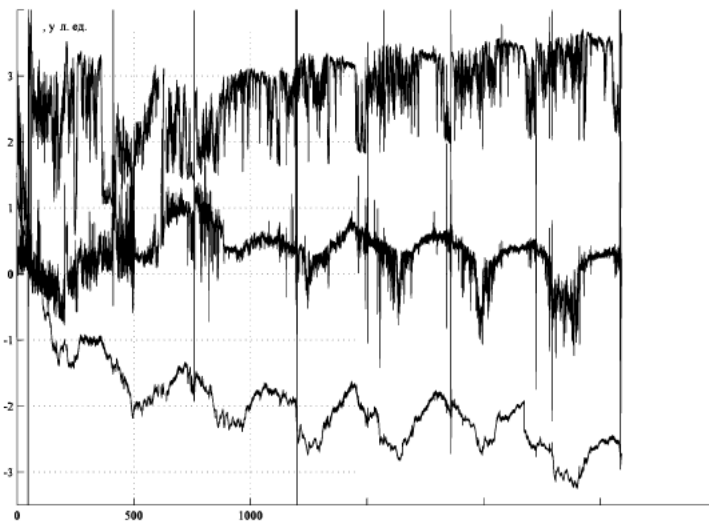


Рис. 3. Сигналы системы ШГМ-3 за 8 лет наблюдений

сложный характер регистрируемых сигналов. В сигналах 2-го и 3-го каналов отчетливо видны низкочастотные периодические составляющие. В сигналах всех каналов присутствуют кажущиеся случайными колебания относительно высокой частоты. Для выявления регулярных периодических составляющих сигналов использован МНЭ.

В результате применения МНЭ для накопленных данных систем ШГМ построен ряд периодограмм, показывающих зависимость расчетной амплитуды ритмов (в условных единицах) от длины периода. Для анализа построены периодограммы с максимальными периодами 500, 100, 60, 30 и 10 суток.

Результаты применения МНЭ для сигналов системы ШГМ-3 представлены на рис. 4–8 для максимальных периодов 10, 30, 60, 100 и 500 суток соответственно. На приводимых далее периодограммах данные для каналов приборной системы приводятся в порядке сверху вниз.

Масштаб графиков выбран из условия максимальной наглядности результатов.

При анализе периодограмм с максимальным периодом 10 суток на всех каналах четко выделяется суточный ритм. Ритм является доминирующим на рассматриваемом множестве периодов для всех каналов.

Анализ периодограмм для более длительных периодов показывает, что положения пиков на отдельных периодограммах не совпадают между собой, в том числе имеют место случаи, когда на одном графике пик, а на другом «провал». При анализе более длительных ритмов использовалась гипотеза, состоящая в том, что длительные ритмы, предположительно связанные с космогеофизическими факторами, должны быть проявлены в сигналах всех (или большей части) приборных систем.

Для удобства сопоставления периодограмма для одной длительности периода совмещены на одном графике и представлены на рис. 4–8 для периодов 10, 30, 60, 100 и 500 суток соответственно.

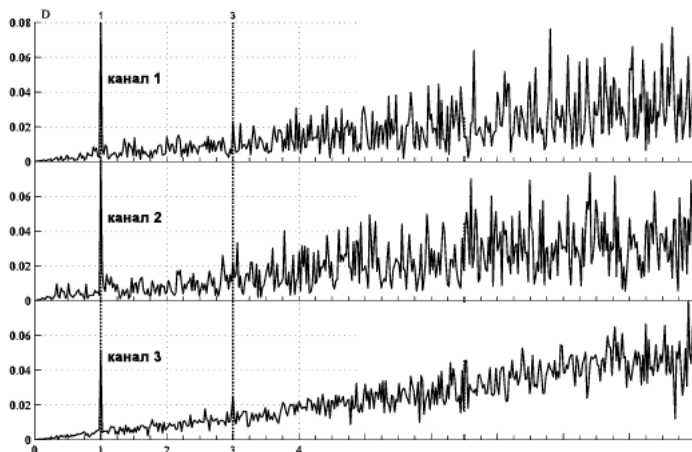


Рис. 4. Периодограмма до 10 суток

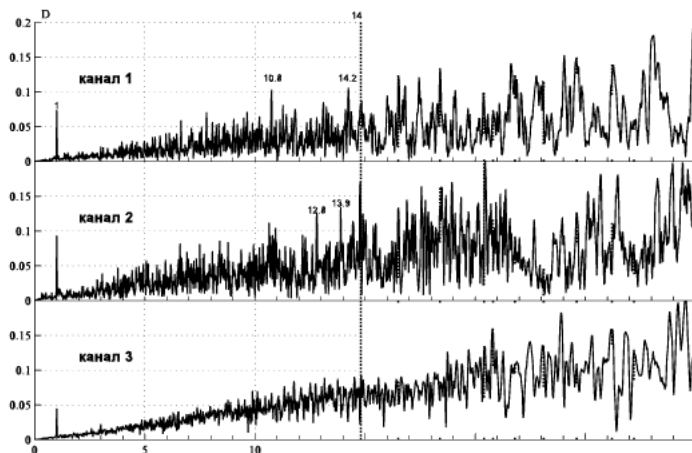


Рис. 5. Периодограмма до 30 суток

При анализе совмещенных периодограмм с максимальным периодом 10 суток на рис. 4 наиболее контрастным пиком является суточный ритм. Интересно отметить, что на каналах 1 и 3 присутствуют третья и на одном из них пятая гармоника суточного ритма. Подобные пики, как было отмечено выше наблюдаются при обработке чисто синусоидальных сигналов, т.е. указанные каналы имеют достаточно длительные участки с суточными ритмами стабильной формы. Другие пики на периодограмме, в частности 6.5, 7.8, 9.5 суток на канале 1, не воспроизводятся на других каналах сравнимо с су-

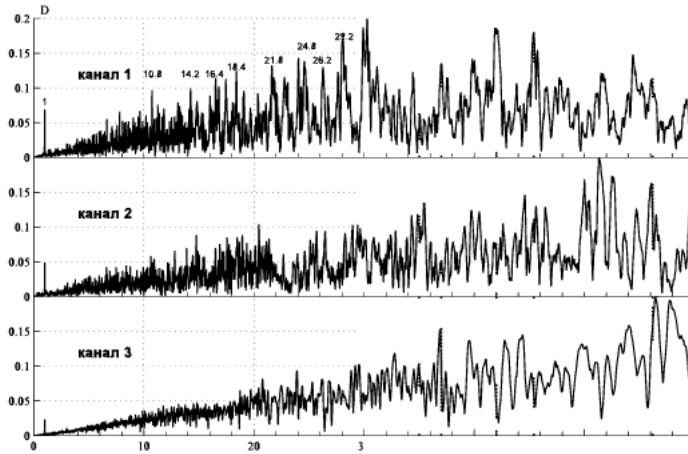


Рис. 6. Периодограмма до 60 суток

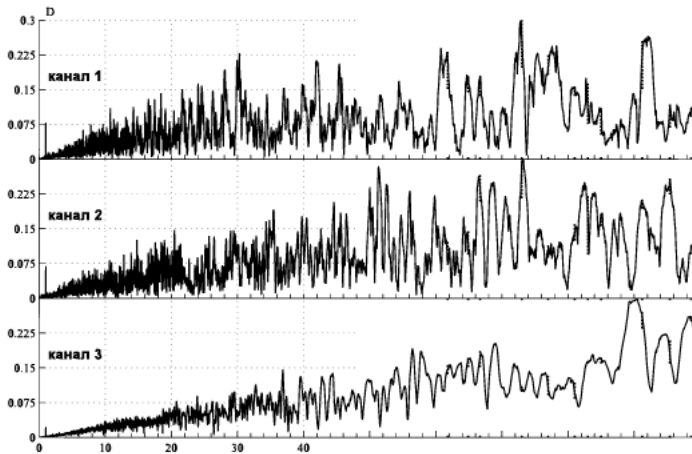


Рис. 7. Периодограмма до 100 суток

точным ритмом. Интересным на периодограмме является также отсутствие недельного ритма, наличие которого можно было бы ожидать как следствие техногенной деятельности.

При анализе совмещенных периодограмм с максимальным периодом 30 суток на рис. 5 можно выделить следующие ритмы: 14.9, 16.4, 18.4, 20.3, 20.8, 21.8, 23.2, 24.8, 26.2, 27.2 суток.

При анализе совмещенных периодограмм с максимальным периодом 60 суток на рис. 6 можно выделить следующие ритмы: около 34, 36, 45, 56 суток.

При анализе совмещенных периодограмм с максимальным периодом 100 суток на рис. 7 можно выделить ритмы с периодами около 62, 64, 67, 73, 77, 81, 83, 85, 91, 96, 98 суток.

При анализе совмещенных периодограмм с максимальным периодом 500 суток на рис. 8 можно выделить годовой ритм с периодом 365 суток. Наличие

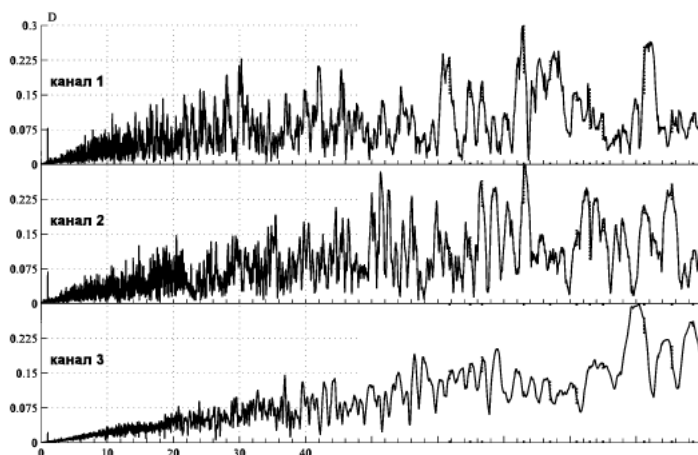


Рис. 8. Периодограмма до 500 суток

такого ритма можно было предположить из визуального анализа сигналов на рис. 3. На ряде каналов этот выглядит как комбинация ритмов 350 и 372 суток с характерным провалом на 365. Также можно обнаружить ритмы с периодами 102, 108, 120, 124, 132, 155, 182, 255, 290 суток.

Таким образом в результате анализа периодограмм были выявлены следующие ритмы: 1.0, 14.9, 16.4, 18.4, 20.3, 20.8, 21.8, 23.2, 24.8, 26.2, 27.2, 34, 36, 45, 56, 62, 64, 67, 73, 77, 81, 83, 85, 91, 96, 98, 102, 108, 120, 124, 132, 155, 182, 255, 290, 365 суток. Некоторые ритмы могут являться гармониками других, так, в частности, третья гармоника ритма 18.4 суток близка к 56 суткам.

Среди указанных ритмов фундаментальными являются суточный и годовой ритмы. Ритмы 120 и 124 суток соответствуют примерно 1/3 года, 182 суток соответствует 1/2 года, ритмы около 90 суток соответствуют одному сезону (зима, весна, лето, осень). Это говорит об определенной повторяемости графиков на полугодовых и крупных внутригодовых интервалах.

Ритм 27.2 близок к сидерическому лунному месяцу, точное значение которого 27.32. Период 85 суток близок к периоду обращения планеты Уран 83.526 [14].

Дальнейшее исследование ритмов, присутствующих в сигналах приборных систем, должно позволить разработать модель генезиса сигналов приборных систем и метод их интерпретации.

Список литературы

1. Мартынов О.В. Концепция системы прогноза природных катастроф и практические результаты, полученные на основе аппарата нелинейной физики, математики и данных системы // *Нелинейный мир*. 2008. Т. 6. № 10. С. 579-615.
2. Шопин С.А. О работах О.В. Мартынова по прогнозу землетрясений // Система «Планета Земля»: 200 лет Священному союзу. М.: ЛЕНАНД, 2015. С. 102-120.

3. Шопин С.А. Влияние микросейсм и вариаций атмосферного давления на измерительные системы на основе горизонтальных крутильных весов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч.1. С. 249-263.
4. Пархомов А.Г. Исследование неслучайных вариаций измерений радиоактивности // Атлас временных вариаций природных, антропогенных и социальных процессов. Том 3. Природные и социальные сферы как части окружающей среды и как объекты воздействий. М.: Янус-К°, 2002. С. 607-612.
5. Измайлов В.П., Карагюз О.В., Пархомов А.Г. Вариации результатов измерений гравитационной постоянной // Атлас временных вариаций природных, антропогенных и социальных процессов. Том 2. Циклическая динамика в природе и обществе. М.: Научный мир, 1998. С. 163-168.
6. Parkhomov A.G. A Search for Laws in the Results of Gravitational Constant Measurements // Gravitation and Cosmology, 2009. V. 15. №. 2, P. 174–177.
7. Пановский Г.А., Брайер Л. Статистические методы в метеорологии. М.: Гидрометеоиздат, 1967. 241 с.
8. Дещеревский А.В., Сидорин А.Я. Периодограммы наложенных эпох при поиске скрытых ритмов в экспериментальных рядах // Сейсмические приборы. 2011. Т. 47. № 2. С. 21-43.
9. Дещеревский А.В., Сидорин А.Я. Сравнение периодограмм наложенных эпох и спектров Фурье экспериментальных рядов // Сейсмические приборы. 2011. Т. 47. № 3. С. 44-70.
10. Deshcherevskii A.V., Sidorin A.Ya. Periodograms of Superimposed Epochs in Search for Hidden Rhythms in Experimental Data Time Series // Seismic Instruments. 2012. V. 48. №. 1. P. 57-74.
11. Гульельми А.В., Зотов О.Д. Спектры скрытых периодичностей геоэлектромагнитных и сейсмических событий // Солнечно-земная физика. 2012. Вып. 20. С. 72-75.
12. Пархомов А.Г. Космос. Земля, Человек. Новые грани науки. М.: Наука, 2009. 272 с.
13. Пархомов А.Г. Экспериментальные исследования инфранизкочастотных флуктуации в полупроводниках. Закономерности. Космические ритмы. М.: МНТЦ, 1991. 24 с.
14. Berry B.L. Heliogeophysical and Other Natural Processes, Periods of Their Oscillations, and Forecasts // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2011. V. 47. №. 7. P. 848–880.

Шопин Сергей Александрович (sshopin@mail.ru), главный специалист, отдел информационных технологий и геоинформационных систем, ООО «Тульская геологоразведочная партия».

Скобельцын Сергей Алексеевич (skbl@rambler.ru), к.ф.м.-н., доцент, кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

Analysis of wideband gradiometer data using superimposed epochs method

S. A. Shopin, S. A. Skobeltsyn

Abstract. Results of analysis of time series of special gravimetric instruments data (wideband gradiometers) using method of superimposed epochs are presented. It is shown the presence of several rhythms in the registered signals: diurnal, year long and seasonal rhythms along with several others.

Keywords: wideband gradiometer, rhythm, periodogram, superimposed epochs method.

Shopin Sergey (sshopin@mail.ru), chief specialist, department of informational technologies and geoinformation systems, Tul'skaya Geologorazvedochnaya Partiya Ltd.

Skobeltsyn Sergey (skbl@rambler.ru), candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

Поступила 12.01.2015

Выбор основы рецепторного элемента БПК-биосенсора по субстратной специфичности и параметрам роста дрожжей *Debaryomyces hansenii* *

Н. Ю. Юдина, Т. Н. Козлова, П. В. Мельников, В. А. Арляпов

Аннотация. Проведено сравнение ростовых характеристик, морфологических особенностей и субстратной специфичности дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1050, Y-111, Y-1585, Y-2482 с целью выявления наиболее перспективного штамма для оценки индекса биохимического потребления кислорода (БПК). Наибольшая продуктивность выявлена для дрожжей *D. hansenii* Y-1585 и Y-2482. Максимальная окислительная активность наблюдается при культивировании дрожжей *D. hansenii* в течение 18–24 часов. Профиль субстратной специфичности всех исследуемых штаммов дрожжей *Debaryomyces hansenii* различен. Наиболее перспективными штаммами для создания биосенсора для оценки индекса биохимического потребления являются дрожжи *D. hansenii* Y-2482 и Y-1585.

Ключевые слова: дрожжи *Debaryomyces hansenii*, биосенсор, ростовые параметры микроорганизмов, субстратная специфичность, биохимическое потребление кислорода, БПК.

Введение

Во всем мире промышленные биотехнологические компании ведут разработку новых биокатализаторов для внедрения в различные сферы производства и особое внимание уделяется изучению дрожжей, т.к. они синтезируют белки, липиды, внеклеточные полисахариды, витамины группы В и другие необходимые вещества. Одним из направлений применения биокатализаторов на основе дрожжевых клеток является создание БПК-биосенсоров. Это направление актуально, т.к. стандартный метод определения биохимическо-

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение № 14.574.21.0062 и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых–кандидатов наук, договор № 14.Z56.14.330-МК

го потребления кислорода (БПК) основан на тестах, продолжительность которых составляет 5 суток. Преимуществом использования БПК-биосенсоров является сокращение времени анализа с 5 суток до 20 минут. В зарубежной и отечественной литературе описано большое число БПК-биосенсоров на основе дрожжей [1–3], но это направление до сих пор актуально, так как не найдены микроорганизмы, удовлетворяющие всем требованиям. Дрожжи являются более предпочтительным биоматериалом для БПК-биосенсоров, поскольку устойчивы к негативным факторам окружающей среды и могут функционировать в распознающем элементе биосенсора длительное время [4,5]. Одним из перспективных видов микроорганизмов являются дрожжи *Debaryomyces hansenii*, т.к. они способны окислять широкий спектр органических веществ и устойчивы в средах с высоким осмотическим давлением [6,8]. Эти дрожжи первоначально были выделены из соленых сред и относятся к самым осмоотолерантным дрожжам (могут выдерживать высокие концентрации солей и сахаров) [6]. Дрожжи *Debaryomyces hansenii*, распространены в различных пищевых продуктах (мясных, молочных и продуктах брожения соевого соуса [7]) и имеют большой биотехнологический потенциал. Особый интерес вызывает возможность культивирования данных дрожжей при солености среды до 24 %, что исключает возможность появления в культуральной среде нежелательных микроорганизмов. Кроме того, микроорганизмы *Debaryomyces hansenii* выделяют токсины, способные подавлять рост других дрожжей [8]. Данный вид дрожжей используется в промышленном масштабе для производства витамина В₂ (рибофлавина), а также способен образовывать арабит [9]. Помимо сахаров дрожжи *Debaryomyces hansenii* способны окислять n-алканы, мелибиозу, раффинозу, растворимый крахмал, инозит, ксилозу, галактозу, молочную и лимонную кислоту [6,8,10]. Данная особенность дрожжей *Debaryomyces hansenii* позволяет использовать их в создании рецепторного элемента БПК-биосенсора, с целью расширения спектра окисляемых органических соединений.

Среди большого многообразия штаммов *D. hansenii* наиболее перспективными являются: *Debaryomyces hansenii* ВКМ Y-111 (*Debaryomyces nicotinae* var. *minor*) выделенные в Испании из ферментационного табака; *Debaryomyces hansenii* ВКМ Y-1050 (*Debaryomyces sake*) извлеченные из sake-moto (Япония); *Debaryomyces hansenii* ВКМ Y-1585 которые относились раньше к виду *Candida famata*; *Debaryomyces hansenii* ВКМ Y-2482 выделенные в Магаданской области (Россия) из мамонта Димы.

Целью данной работы является определение ростовых параметров, морфологии и субстратной специфичности дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-111, Y-1050 Y-1585 и Y-2482 для выявления наиболее эффективного биокатализатора для оценки индекса БПК.

Материалы и методы

Биосенсорные измерения. Исследования проводились с помощью многофункционального анализатора рН-метр-иономер-БПК-термооксиметр ЭКСПЕРТ-001-4.0.1 (научно-производственная фирма «Эконикс-эксперт», Москва) в режиме «термооксиметр», что позволяло производить непрерывную регистрацию сигнала. Управление прибором и обработка результатов проводилась с помощью встроенной программы «EXP2PR» (научно-производственная фирма «Эконикс-эксперт», Москва). Измеряемым параметром (ответом биосенсора) являлась максимальная скорость изменения выходного сигнала биосенсора при добавлении субстрата.

Культивирование клеток микроорганизмов. Клетки штаммов дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-111, Y-1050, Y-1585 и Y-2482 выращивали на богатой среде (жидкая глюкозо-пептонная питательная среда). Состав жидкой среды: глюкоза — 10 г/дм³, пептон — 5 г/дм³, дрожжевой экстракт — 0,5 г/дм³ (Sigma, США). Среду для выращивания клеток стерилизовали автоклавированием при давлении в 1 атмосферу в течение 45 минут. Клетки выращивали аэробно от 18 до 24 часов в качалочных колбах объемом 750 см³ при температуре 29 °С. Затем полученную биомассу центрифугировали при комнатной температуре при 8000 об/мин 10 минут. Далее центрифугат промывали 20 мМ фосфатным буфером рН 6,8. Осевшие клетки рассуспандировали в свежие порции буфера, распределяли по порциям и осаждали на центрифуге «Eppendorf» 5 минут при 8000 об/мин. Промытую биомассу взвешивали и хранили в микропробирках при температуре -25 °С.

Высев на твердую среду. Клетки микроорганизмов *Debaryomyces hansenii* ВКМ Y-1050, ВКМ Y-1585, ВКМ Y-111, ВКМ Y-2482 выращивали на твердой среде. Состав твердой среды: глюкоза — 10 г/дм³, пептон — 5 г/дм³, дрожжевой экстракт — 0,5 г/дм³ и агар-агар — 20 г/дм³. Колбы с агаризованной питательной средой стерилизовали автоклавированием, затем разливали в стерильные чашки Петри. Для посева использовали микробиологическую петлю, которую прокаливали в пламени горелки. Затем с помощью петли брали тонкую пленку жидкой суспензии из предварительно выращенной культуры. Петлей проводили по поверхности среды, делая серии штрихов. Засеянные чашки помещали в термостат (29 °С).

Определение ростовых параметров дрожжевого штамма. Культивирование дрожжей проводили путём перекрывания интервалов времени, в течение которых проводилась оценка оптической плотности. Измерения оптической плотности суспензии проводили турбидиметрическим методом на фотометре Эксперт-003 при длине волны 590 нм и толщине кюветы 1 см относительно кюветы с дистиллированной водой, каждые 2 часа в течение 4 суток.

Исследование микроорганизмов методом микроскопирования. Морфологию клеток определяли путем оптического микроскопирования. Для микроскопического анализа использовали микроскоп-тринокуляр Биомед-4 (Биомед, Россия). В ламинарном боксе на чистом предметном стекле готовили мазок исследуемых дрожжей, высушивали его на воздухе и после полного высыхания фиксировали. Затем наносили несколько капель красителя фуксина на 1-2 мин., промывали водой и подсушивали фильтровальной бумагой. На высохший препарат наносили иммерсионное масло. Готовый препарат помещали на предметный столик микроскопа и проводили исследования при увеличении в 1600 раз.

Иммобилизация клеток *Debaryomyces hansenii*. Для формирования рецепторного элемента проводили предварительное разбавление дрожжей *Debaryomyces hansenii* буферным раствором pH 6,8 в соотношении 1:3. Полученную суспензию дрожжей *Debaryomyces hansenii* в объеме 5 мкл наносили на диализную мембрану и фиксировали на электроде с помощью резинового кольца.

Результаты и обсуждение

Согласно имеющимся данным дрожжи *Debaryomyces hansenii* обладают широкой субстратной специфичностью и способны окислять многие спирты, углеводы, аминокислоты и другие органические вещества, устойчивы к высоким концентрациям солей и высокому осмотическому давлению [6], что может быть использовано для разработки рецепторного элемента БПК-биосенсора. Для выявления эффективного биокатализатора для оценки индекса БПК из 4 штаммов дрожжей *Debaryomyces hansenii* проведена оценка интегральных кривых роста, субстратной специфичности и показателей продуктивности.

Кривые роста дрожжей *Debaryomyces hansenii*. Кривые роста микроорганизмов регистрировали турбидиметрическим методом, снимая зависимость оптической плотности культуральной жидкости во времени. Хотя закон Бугера–Ламберта–Бэра, связывающий концентрацию раствора с поглощением, строго не применим для растворов, сильно рассеивающих свет, но существует линейная зависимость между поглощением света дрожжевой суспензии и количеством клеток в ней в диапазоне оптической плотности примерно до 0,3 (при оптической плотности больше 0,3 производится разбавление суспензии клеток). Количественное измерение выросших клеток после достижения фазы экспоненциального роста затруднено еще и увеличением числа мертвых клеток. Однако зависимость оптической плотности от времени достоверно показывает общий характер роста культуры микроорганизмов.

Кривые роста, полученные при пересевании дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1585, Y-111, Y-1050 и Y-2482 с твердой среды — агара в жидкую глюкозо-пептонную, среду представлены на рис. 1.

Графическая зависимость оптической плотности культуральной жидкости от времени имеет сигмоидальную форму и является типичной кривой роста дрожжей [11]. На кривых роста дрожжевых штаммов можно выделить 5 фаз роста.

В период лаг-фазы видимые признаки размножения дрожжей отсутствуют, однако обменные процессы в клетках протекают активно: в среду выделяются экзо-ферменты для расщепления высокомолекулярных питательных веществ, внутри клетки синтезируются нуклеиновые кислоты и ферменты, необходимые для дальнейшего активного роста. Продолжительность лаг-фазы (адаптации) зависит от внешних условий, штаммовых особенностей дрожжей и возраста клеток и варьируется от 8 до 18 часов. Дрожжи *D. hansenii* Y-1050 имеют самую длительную лаг-фазу (18 ч).

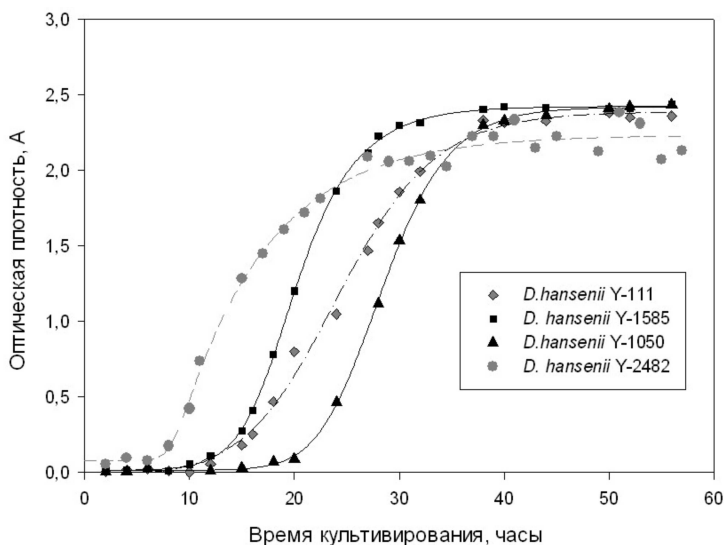


Рис. 1. Кривые роста дрожжей *Debaryomyces hansenii*

Экспоненциальная фаза характеризуется интенсивным делением клеток, вследствие чего происходит накопление биомассы и продуктов жизнедеятельности клеточных культур. Клетки чувствительны к стрессовым факторам. Продолжительность экспоненциальной фазы роста для дрожжей *D. hansenii* Y-1585 составляет 6 часов, *D. hansenii* Y-2482 — 7 часов, *D. hansenii* Y-111 — 8 часов, *D. hansenii* Y-1050 — 10 часов. В замкнутой культуре фаза экспоненциального роста не может продолжаться бесконечно долго, она переходит в фазу линейного роста. В этой фазе наблюдается линейное увеличение числа микробных клеток в зависимости от времени культивирования [12]. Самая продолжительная фаза линейного роста характерна для дрожжей *D. hansenii* Y-2482 и составляет 12 часов.

Переходная фаза (фаза замедления роста) характеризуется снижением роста клеточной культуры за счет уменьшения числа митозов, понижением

активности дыхательных ферментов, синтезом запасных углеводов. В данной фазе клетки дрожжей более устойчивы к стрессам.

В стационарной фазе происходит замедление роста культуры из-за качественного изменения среды. Число жизнеспособных клеток в популяции перестает увеличиваться. Численность популяции практически не изменяется. Для трех штаммов дрожжей *D. hansenii* Y-111, Y-1050 и Y-1585 наблюдается практически одновременный выход на стационар (36–40 ч).

Кривые роста дрожжей *D. hansenii*, полученные для 4 различных штаммов, аппроксимируются сигмоидальной зависимостью, но различаются временными интервалами прохождения стадий роста.

Приближенный анализ интегральных кривых роста дрожжей *D. hansenii*. Результаты количественного изучения роста микроорганизмов могут быть представлены следующими параметрами: удельная скорость роста, время удвоения биомассы, метаболический коэффициент, характеризующий использование субстрата и образование продукта, максимум биомассы. В настоящей работе проведен приближенный анализ интегральных кривых роста дрожжей *D. hansenii*.

ТАБЛИЦА 1
Кинетические и количественные параметра роста клеток *Debaryomyces hansenii*

<i>Debaryomyces hansenii</i>				
Параметры	Y-111	Y-1585	Y-1050	Y-2482
Кинетические параметра роста клеток <i>Debaryomyces hansenii</i>				
Удельная скорость роста клеточной культуры μ , с^{-1}	$9,0 \cdot 10^{-5}$	$9,0 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$
Предельная максимальная удельная скорость роста μ_m , с^{-1}	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$
Параметр, характеризующий сродство клеток культуры к субстрату K_S , М	0,20	0,28	0,29	0,27
Количественные параметры роста клеток <i>Debaryomyces hansenii</i>				
Выход биомассы (24 ч), $\text{г}/\text{дм}^3$	6,7	15,6	3,8	14,3
Продуктивность (24 ч), $\text{г}/\text{дм}^3\text{ч}$	0,28	0,65	0,16	0,60
Время удвоения биомассы, ч	2,1	2,1	2,75	3,2

Удельная скорость роста клеточной культуры для всех 4 штаммов дрожжей *Debaryomyces hansenii* имеет один порядок, следовательно, скорость процессов репликации ДНК в S-фазе клеточного цикла для всех штаммов

примерно равна. Таким образом, все исследуемые штаммы имеют схожую длительность прохождения клеточного цикла.

Наименьшим сродством клеток к субстрату (K_S) обладает штамм дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-111, что определяет его низкую продуктивность (0,28 г/дм³ч). При создании рецепторных элементов биосенсоров целесообразно использование штаммов дрожжей с высокой продуктивностью. Наибольшая продуктивность и выход биомассы получены для дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1585 и Y-2482.

Рост культур на твердой среде. Для контроля чистоты культуры, используемой для создания рецепторного элемента БПК-биосенсора, необходимо произвести изучение морфологических особенностей отдельных колоний дрожжей *D. hansenii*. Для выявления морфологических различий отдельных колоний производили выращивание дрожжей *D. hansenii* ВКМ Y-111, Y-1050, Y-1585, Y-2482 на твердой агаризованной среде. Морфологические характеристики дрожжей *D. hansenii* Y-1585, Y-111 и Y-1050 представлены в табл. 2.

Таблица 2

Морфологические характеристики колоний микроорганизмов

<i>Параметры</i>	Y-111	Y-1585	Y-1050	Y-2482
Цвет	Бесцветный	Пигментированный		
Размер	3 мм	2 мм	1 мм	2 мм
Форма	Неправильная	Круглая		
Поверхность	Гладкая			
Профиль	Кратерообразный	Каплевидный	Бугристый	Каплевидный
Край	Зубчатый	Гладкий	Волнистый	Гладкий
Структура	Мелкозернистая	Однородная		
Консистенция	Тягучая			
Блеск, прозрачность	Матовая	Блестящая		

Все полученные колонии имеют схожее морфологическое строение, характерное для данного вида дрожжей. Так, поверхность всех изучаемых колоний дрожжей *D. hansenii* — гладкая; консистенция — тягучая. Отличительной особенностью дрожжей *D. hansenii* Y-111 является крупный размер (metricconverterProductID3 мм3 мм) и неправильная форма колоний. Дрожжи *D. hansenii* Y-1585 и Y-2482 имеют идентичные параметры колоний, и для их различия необходимо исследование культур методом светового микроскопирования.

Исследование культур методом светового микроскопирования. Исследование морфологии дрожжей *D. hansenii* осуществляли методом светового микроскопирования клеток, выращенных в течение 24 часов, поскольку

ку форму и размеры вегетативных клеток, а также характер вегетативного размножения наблюдают на 24–48-часовых культурах. Для работы использовали микроскоп Биомед-4.

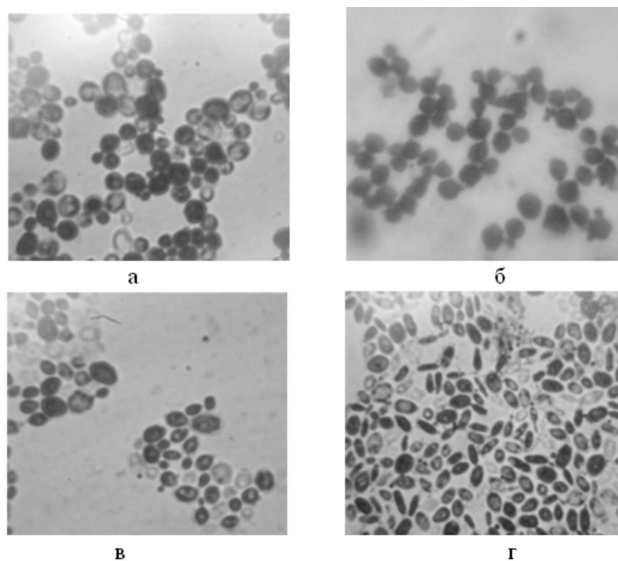


Рис. 2. Морфология дрожжей *Debaryomyces hansenii*:
а — Y-111, б — Y-2482, в — Y-1050, г — Y-1585 (окраска фуксином,
увеличение в 1600 раз)

Клетки дрожжей *D. hansenii* Y-1050, Y-111, Y-2482 крупные, имеют округлую форму с ярко выраженной оболочкой. На рис. 2, в видно много маленьких отпочковывающихся клеток, что характерно для фазы экспоненциального роста. На остальных фотографиях делящихся клеток меньше, что характерно для линейной фазы роста. Дрожжи *D. hansenii* Y-1585 сильно отличаются от трех других штаммов и имеют вытянутую форму. Таким образом, для контроля чистоты выросшей культуры и отличия отдельных штаммов можно использовать высев на твердые питательные среды и оптическую микроскопию.

Выбор оптимального времени культивирования. Для получения рецепторного элемента с наибольшей активностью необходимо провести выбор оптимального времени культивирования. Для выбора оптимального времени культивирования дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1050, Y-111, Y-1585, Y-2482 была проанализирована зависимость окислительной активности рецепторного элемента от стадии роста. Для выполнения анализа был произведен отбор проб клеток после 16, 18, 20, 24, 32, 38 и 50 часов культивирования и иммобилизация на кислородном электроде типа Кларка. Принцип работы микробного сенсора на основе кислородного электрода основан на том, что при окислении субстрата иммобилизованными на поверхности кис-

лородного электрода микроорганизмами возрастает их дыхательная активность, и в приэлектродном пространстве снижается концентрация кислорода, что регистрируется с помощью электрода. В качестве субстрата использовали раствор глюкозо-глутаминовой смеси (ГГС), т.к. он применяется в качестве стандарта при определении БПК [13].

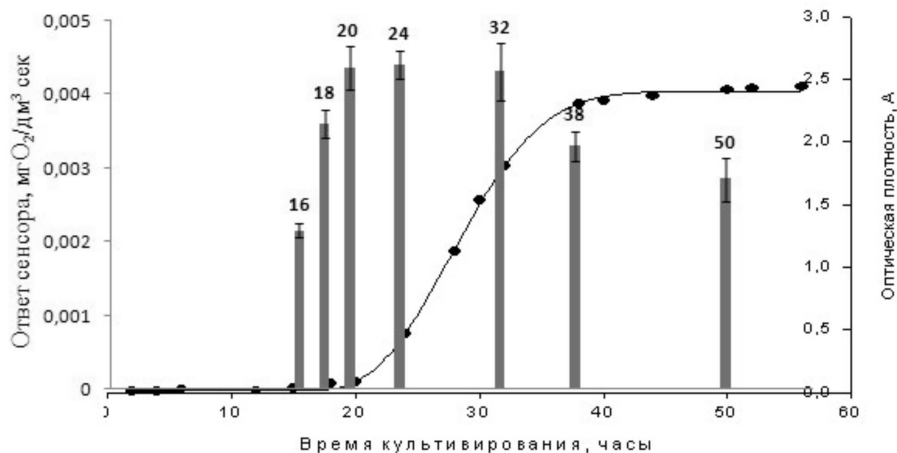


Рис. 3. Окислительная активность дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1050

Для всех четырех штаммов зависимости окислительной активности от стадии роста имеют схожий характер. Наибольшая активность клеток *Debaryomyces hansenii* Y-1050 (рис. 3) и Y-1585 наблюдается в середине экспоненциальной фазы роста (20–24 ч), дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-111 и Y-2482 при 18–20 часах роста. Таким образом, оптимальное время культивирования дрожжей *Debaryomyces hansenii* находится в интервале от 18 до 24 часов, поскольку достигаются высокая окислительная активность и достаточная продуктивность.

Субстратная специфичность дрожжей *Debaryomyces hansenii*.

Для определения интегрального показателя качества воды, такого как биохимическое потребление кислорода, необходимо использовать микроорганизмы, способные окислять широкий спектр органических соединений, которые могут быть обнаружены в сточных водах.

Анализ литературных данных по применению дрожжей *Debaryomyces hansenii*, показал, что данный вид дрожжей способен функционировать в соленых средах и окислять широкий спектр субстратов [8,14].

В работе проведена оценка субстратной специфичности дрожжей *Debaryomyces hansenii*, закрепленных на кислородном электроде с помощью диализной мембраны по 24 субстратам, относящимся к разным классам органических соединений (рис. 4). В качестве субстратов были выбраны

органические вещества, наиболее часто встречающиеся в стоках пищевых и технологических производств.

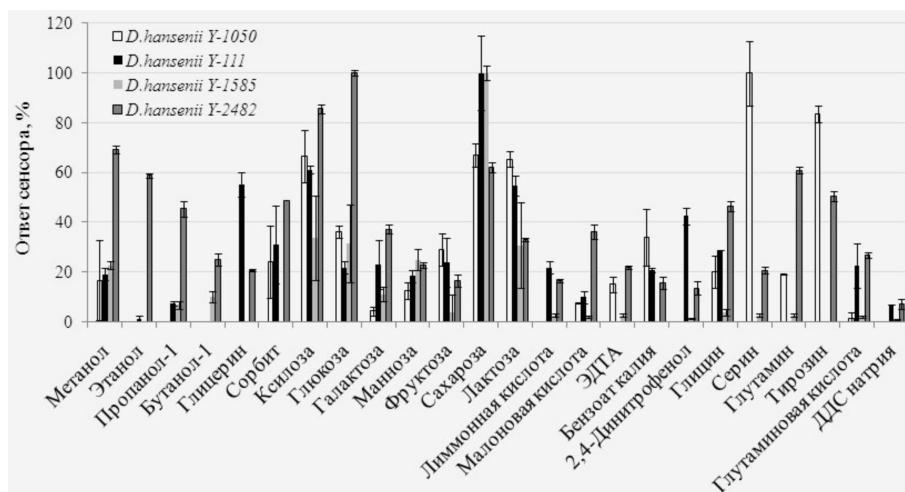


Рис. 4. Субстратная специфичность дрожжей *Debaryomyces hansenii*

Дрожжи *D. hansenii* Y-1585 и Y-111 обладают наибольшей чувствительностью к сахарозе, *D. hansenii* Y-2482 — к глюкозе, ответы на них были приняты за 100 %. Для дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1050 максимальный ответ сенсора был зафиксирован на аминокислоту серин и принят за 100 %.

Величина отклика на спирты для дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-1585, Y-1050, Y-2482 и Y-111 уменьшается по мере увеличения углеводородного радикала. Данная особенность может быть объяснена меньшей проницаемостью крупных и разветвленных молекул спиртов к активным центрам ферментов. Отличительной чертой дрожжей *D. hansenii* Y-2482, позволяющей использовать эти микроорганизмы для анализа образцов сточных вод ликероводочных предприятий, является их способность давать высокие ответы на спирты (30–70 %). Дрожжи *D. hansenii* Y-111 хорошо окисляют глицерин, данная особенность согласуется с литературными данными [15]. Следующий класс анализируемых субстратов — углеводы. Самый большой ответ для всех штаммов дрожжей был получен на сахарозу, он составил 60–100 %. Высокие ответы могут быть обусловлены высокой активностью фермента инвертазы, расщепляющего дисахарид сахарозу на α -глюкозу и β -фруктозу, и последующим окислением этих моносахаридов. Наибольшее электрокаталитическое окисление аминокислот зафиксировано для дрожжей штамма *D. hansenii* Y-2482.

Окисление этилендиаминтетрауксусной кислоты (ЭДТА) дрожжами *D. hansenii* Y-1050, Y-2482, Y-1585 является важным с практической точки зрения, т.к. ЭДТА используется в производстве бытовой химии и синтетических

моющих средств, а также при промывке теплоэнергетического оборудования, труб, котлов.

Бензоат калия — пищевая добавка, оказывающая угнетающее действие на дрожжи, подавляя активность ферментов в клетке. Ответ сенсора на основе дрожжей *D. hansenii* Y-1050, Y-2482, Y-1585, Y-111 варьировался от 18 до 38 %.

Ценным с практической точки зрения является факт наличия ответов на додецилсульфат (ДДС) натрия, а также отсутствие токсического действия данных субстратов при кратковременном воздействии на клетки *Debaryomyces hansenii* в составе биорецептора. На данный субстрат были зафиксированы ответы для штаммов дрожжей *Debaryomyces hansenii* Y-2482, Y-1585, Y-111.

Таким образом, наиболее широкой субстратной специфичностью обладают дрожжи *D. hansenii* Y-2482. Субстратная специфичность дрожжей *D. hansenii* Y-1050, Y-2482, Y-1585, Y-111, относящихся к одному роду, различается в пределах штамма. Все исследуемые микроорганизмы окисляют сахара, аминокислоты, спирты и другие органические вещества. Перспективными штаммами для дальнейшего применения для оценки индекса биохимического потребления является дрожжи *D. hansenii* Y-2482 и Y-1050. Для оценки БПК в сточных водах с высоким содержанием спиртов наиболее эффективным является применение дрожжевого штамма *D. hansenii* Y-2482, а в водах с высокой концентрацией аминокислот — дрожжевого штамма *D. hansenii* Y-1050.

Выводы

Проведен приближенный анализ интегральных кривых роста дрожжевых штаммов *Debaryomyces hansenii* Y-1050, Y-111, Y-1585, Y-2482. Наибольшая продуктивность наблюдается для дрожжей *D. hansenii* Y-1585 (0,65 г/дм³ч) и Y-2482 (0,60 г/дм³ч). Оптимальное время культивирования дрожжей *D. hansenii* Y-1050, Y-1585 находится в интервале от 20 до 24 часов, а для дрожжей *D. hansenii* Y-111, Y-2482 максимальная окислительная активность наблюдается при культивировании в течение 18-20 часов. Клетки дрожжей *D. hansenii* Y-1050, Y-111, Y-2482 крупные, имеют округлую форму с ярко выраженной оболочкой, дрожжи *D. hansenii* Y-1585 овальной формы. Поверхность всех изучаемых колоний дрожжей *D. hansenii* — гладкая; консистенция — тягучая. Определен профиль субстратной специфичности дрожжей *Debaryomyces hansenii*. Все исследуемые микроорганизмы окисляют сахара, аминокислоты, спирты и другие органические вещества. Таким образом, наиболее перспективным штаммом для дальнейшего применения для оценки индекса биохимического потребления является дрожжи *D. hansenii* Y-2482, поскольку обладают высокой продуктивностью и широкой субстратной специфичностью.

Список литературы

1. Микробные биосенсоры для определения биологического потребления кислорода (обзор) / О.Н. Понаморева, В.А. Арляпов, В.А. Алфёров, А.Н. Решетиллов // Прикладная биохимия и микробиология. 2011. Т. 47. № 1. С. 5–15.
2. A new BOD estimation method employing a double-mediator system by ferricyanide and menadione using the eukaryote *Saccharomyces cerevisiae* / H. Nakamura, K. Suzuki, H. Ishikuro, S. Kinoshita, R. Koizumi, S. Okuma, M. Gotoh, I. Karube // Talanta. 2007. V. 72. № 1. P. 210–216.
3. Biosensor analyzer for bod index express control on the basis of the yeast microorganisms *Candida maltosa*, *Candida blankii*, and *Debaryomyces hansenii* / V. Arlyapov, S. Kamanin, O. Ponomoreva, A. Reshetilov // Enzyme and Microbial Technology. 2012. V. 50. № 4-5. P. 215–220.
4. A flow injection analysis system with encapsulated high-density *Saccharomyces cerevisiae* cells for rapid determination of biochemical oxygen demand / K.S. Seo [et al.] // Applied microbiology and biotechnology. 2009. V. 83. № 2. P. 217–223.
5. Quick and reliable estimation of BOD load of beverage industrial wastewater by developing BOD biosensor / P. Dhall [et al.] // Sensors and Actuators B: Chemical. 2008. V. 133. № 2. P. 478–483.
6. Draft genome sequence of salt-tolerant yeast *Debaryomyces hansenii* var. *hansenii* MTCC 234 / S. Kumar [et al.] // Eukaryotic cell. 2012. V. 11. № 7. P. 961–962.
7. Kurtzman C., Fell J. W., Boekhout T. The yeasts: a taxonomic study. T. 1. London: Elsevier, 2011.
8. Breuer U., Harms H. *Debaryomyces hansenii* — an extremophilic yeast with biotechnological potential // Yeast. 2006. V. 23. № 6. P. 415–437.
9. Gonzalez-Hernandez J.C. Molecular cloning and characterization of STL1 gene of *Debaryomyces hansenii* // J. of Yeast and Fungal Research. 2010. V. 1. № 4. P. 62–72.
10. Genomic Exploration of the Hemiascomycetous Yeasts: 14. *Debaryomyces hansenii* var. *Hansenii* / A. Lépingle [et al.] // FEBS letters. 2000. V. 487. № 1. P. 82–86.
11. Меледина Т.В., Давыденко С.Г., Васильева Л.М. Физиологическое состояние дрожжей: учебное пособие. СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2013. 48 с.
12. Варфоломеев С.Д., Гуревич К.Г. Биокинетика: практический курс. М.: Фаир-пресс, 1999. 720 с.
13. ПНДФ 14. 1:2:3:4. 123-97. Количественный химический анализ вод. Методика выполнения измерений биохимической потребности в кислороде после *n*-дневной инкубации (БПК_{полн}) в поверхностных пресных, подземных (грунтовых), питьевых, сточных и очищенных сточных водах. М., 1997. 25 с.
14. BOD biosensor based on the yeast *Debaryomyces hansenii* immobilized in poly (vinyl alcohol) modified by N-vinylpyrrolidone *Hansenii* / V.A. Arlyapov [et al.] // Enzyme and microbial technology. 2013. V. 53. № 4. P. 257–262.
15. Kurtzman C.P., Fell J.W. The Yeasts, A Taxonomic Study. Peoria, Illinois: Elsevier, 1998. 1055 p.

Юдина Наталья Юрьевна (tysia21-05-90@mail.ru), аспирант, кафедра химии, Тульский государственный университет.

Козлова Татьяна Николаевна, студент, кафедра биотехнологии, Тульский государственный университет.

Мельников Павел Валентинович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра физической химии, Московский государственный университет тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова.

Арляпов Вячеслав Алексеевич (v.a.arlyapov@gmail.com), к.х.н., доцент, кафедра химии, Тульский государственный университет.

Select of the receptor element BOD biosensor based on substrate specificity and growth parameters of yeast *Debaryomyces hansenii*

N. Yu. Yudina, T. N. Kozlova, P. V. Melnikov, V. A. Arlyapov

Abstract. In this research we compared the growth characteristics, and morphological traits and the substrate specificity of yeast *Debaryomyces hansenii* Y-1050, Y-111, Y-1585, Y-2482 in order to identify the most promising strain for biochemical oxygen demand (BOD) assessment. The highest productivity was discovered for the yeast *D. hansenii* Y-1585 and Y-2482. Maximum oxidation activity of *D. hansenii* yeast was after 18–24 hours of culturation. Profile substrate specificity of the studied strains of yeast *Debaryomyces hansenii* was different. Yeast *D. hansenii* Y-2482 and Y-1585 was the most promising to create a biosensor for biochemical demand assessment.

Keywords: biosensor, biochemical oxygen demand, BOD, yeast *Debaryomyces hansenii*.

Yudina Natal'ya (tysia21-05-90@mail.ru), postgraduate student, department of chemistry, Tula State University.

Kozlova Tatiana, student, department of biotechnology, Tula State University.

Melnikov Paul, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, department of physical chemistry, Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technologies.

Arlyapov Vyacheslav (v.a.arlyapov@gmail.com), candidate of chemical sciences, associate professor, department of chemistry, Tula State University.

Поступила 03.02.2015

Взаимодействие флавонола кверцетина с коллагеном *

Е. А. Ягольник, Е. Н. Музафаров, Ю. А. Ким, Ю. С. Тараховский

Аннотация. Проведенное исследование показывает, что при взаимодействии флавонола кверцетина с фибриллярным белком коллагеном типа-1 в спектре поглощения флавонола (полосы 1) происходит сдвиг в коротковолновую область и уменьшается величина оптической плотности в данном диапазоне спектра. Коллаген также способствует уменьшению интенсивности флуоресценции кверцетина, что говорит о связи флавонола с белком. Методом фотоно-корреляционной спектроскопии было получено, что средний размер частиц в образце с коллагеном возрастает после добавления кверцетина, что предполагает возможность агрегации флавонола с белком.

Ключевые слова: кверцетин, коллаген, фибриллярный белок, фотоно-корреляционная спектроскопия, дифференциальной сканирующей калориметрии.

Введение

В последние десятилетия пристальное внимание исследователей привлекают продукты вторичного метаболизма растений — флавоноиды, в связи с широким спектром их биологического действия. Флавоноиды — это вещества растительного происхождения, принадлежащие к полифенолам, обладают положительным влиянием на здоровье человека и некоторые из них широко используются в медицине [1]. На организм человека флавоноиды оказывают антибактериальное, противоопухолевое, антиоксидантное действие, обеспечивают защиту от УФ-излучения, которое является вредным фактором, действующим практически постоянно на кожу и вызывающим повреждение биологических молекул (белков, нуклеиновых кислот) [2]. Среди них кверцетин и его гликозид рутин являются одними из наиболее известных и хорошо изученных флавонолов, которые широко распространены в растительном мире. Считается, что кверцетин может оказывать положительное влияние на метаболизм, препятствуя развитию ожирения. Было показано

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-04-31308 и № 13-04-97526).

как на животных моделях, так и в экспериментах на человеке, что кверцетин может проявлять противовоспалительное действие и препятствовать развитию атеросклероза. Он может также препятствовать пролиферации клеток опухолей, снижает экспрессию факторов риска сердечно-сосудистых заболеваний. Несмотря на многочисленные исследования действия кверцетина на животных и добровольцах, полномасштабных клинических испытаний, подтверждающих возможность использования кверцетина или его гликозидов в качестве лекарственных веществ, недостаточно.

В связи с этим значительный интерес представляет изучение возможности взаимодействия флавонолов с основным белком кожи, которым является коллаген. Коллаген — фибриллярный белок, составляющий основу соединительной ткани организма и обеспечивающий её прочность и эластичность. Функция коллагена заключается в создании высокопрочных компонентов тканей нашего тела, включая костную ткань, зубы, хрящи, сухожилия, связки, фибриллярные компоненты сосудов и кожи. Молекула коллагена, иногда называемая тропоколлагеном, состоит из трех спирально скрученных белковых нитей, субъединиц, каждая из которых имеет ровно 1050 аминокислотных остатков. Некоторые типы коллагенов, включая коллаген типа-I, образуют характерные поперечно-полосатые фибриллы. Фибриллы образованы множеством параллельно-ориентированных молекул тропоколлагена и представляют собой следующий более высокий уровень организации коллагена [3]. В данной работе был использован коллаген типа-I, который присутствует в коже, сухожилиях, костях, кровеносных сосудах, роговице глаза и т.д. В настоящей работе было проведено исследование взаимодействия кверцетина и коллагена на предмет образования функционального комплекса, под которым подразумевается процесс фибриллообразования.

1. Материалы и методы

В работе использовали коллаген типа-1, выделенный из хвостов крыс по методу [4]. Использовали коммерческий препарат кверцетина фирмы Sigma, растворенный в этаноле. Запись спектров поглощения кверцетина и его комплекса с коллагеном проводили на спектрофотометре М-40, в кварцевой спектрофотометрической кювете (2 мл). Все измерения проводили в 10 мМ Трис – HCl буфере, pH 7,4. Запись спектров поглощения осуществляли с помощью программы M40.exe на компьютере, подключенном к прибору.

Спектры флуоресценции кверцетина и его комплекса с коллагеном измеряли на спектрофлуориметре Perkin-Elmer MPF-44B в кварцевой термостатируемой кювете объемом 2мл при температуре 20° С. Все измерения проведены в 20 мМ Трис – HCl, pH 7,4 буфере. Этим же методом определяли константу связывания кверцетина с коллагеном. Константа связывания флавонола с белком была определена из графика зависимости интенсивности флуоресценции кверцетина от концентрации коллагена. Запись спектров

флуоресценции осуществляли с помощью программы MPF44.exe на компьютере, подключенном к прибору.

Динамику рассеяния света под 90° в образцах с коллагеном в присутствии кверцетина снимали на спектрофлуориметре Perkin-Elmer MPF-44B в кварцевой термостатируемой кювете объемом 2 мл на длине волны 400 нм при температуре 20°C . Все измерения проведены в 20 мМ Трис – HCl буфере. Запись кинетики рассеяния света осуществляли с помощью программы MPF44.exe на компьютере, подключенном к прибору.

Размер фибрилл и агрегатов коллагена определяли методом фотонокорреляционной спектроскопии (Dynamic Light Scattering), для чего использовали анализатор субмикронных частиц N5 Submicron Particle Size Analyzer (Beckman Coulter, США). Прибор работал в режиме процессорного анализа распределения по размерам (ППР), позволяющего исследовать полидисперсные образцы. Для измерения в кювету, содержащую 2 мл трис-HCl, 20 мМ (pH 7.4), добавляли 50 мкл коллагена концентрацией 0,12 мг/мл. В различных экспериментах в кювету могли быть добавлены также по 10 мкл растворов флавоноидов. Исходная концентрация каждого раствора была $4 \cdot 10^{-5}$ М. Перед измерением раствор буфера пропускали через фильтр с размером пор 10 мкм для удаления возможных примесей пыли. Измерения проводились под углом 90° .

Температурную зависимость избыточного удельного теплопоглощения (далее термограммы) растворов коллагена регистрировали с помощью дифференциального адиабатного сканирующего микрокалориметра ДАСМ-4 (ИБП РАН, Россия). Объем ячейки 800 мкл. Измерения проведены в 20 мМ Трис – HCl буфере и 20 мМ натрий-фосфатном буфере, при скорости прогрева 1 К/мин. Запись термограмм осуществлялась с помощью программы Wscal на компьютере, подключенном к прибору. Анализ всех полученных результатов проводили с помощью Origin 8.0 и MS Excel.

2. Результаты и обсуждение

Из литературных данных известно, что спектр поглощения большинства флавоноидов характеризуется наличием двух основных максимумов (полос) поглощения [5]. Характерный желтый цвет, присущий значительной части флавоноидов, обусловлен способностью их молекул поглощать свет в области 320–420 нм (полоса 1). Наличие или отсутствие в спектре поглощения полосы 1 определяется степенью окисленности кольца С. На положение максимума поглощения полосы 1 у флавонолов влияет наличие гидроксильной группы при С₃, количество и положение гидроксильных групп в кольце В. Флавоноиды, благодаря своей полифенольной природе, имеют выраженные электронно-донорные свойства. Способность полифенолов термодинамически восстанавливать различные сильно окисленные продукты и, в первую очередь, свободные радикалы обусловлена их низким восстановительным потенциалом (Е₇). Для большинства флавоноидов Е₇ лежит в диапазоне

0,25–0,75. Известно, что общим свойством флавоноидов, в частности и флавонолов, является их способность взаимодействовать с белками. При этом изменяются спектральные свойства флавонолов, являющиеся одним из признаков образования комплекса с молекулой белка.

Спектры поглощения кверцетина и его комплекса с коллагеном.

На рис. 1 представлены спектры поглощения кверцетина и его комплекса с коллагеном. На рисунке видно, что при взаимодействии с коллагеном в течение определенного времени наблюдается незначительный сдвиг максимума полосы поглощения кверцетина 350 нм в коротковолновую сторону, что, возможно, объясняется образованием комплекса флавонола с белком. С течением времени также снижается интенсивность поглощения.

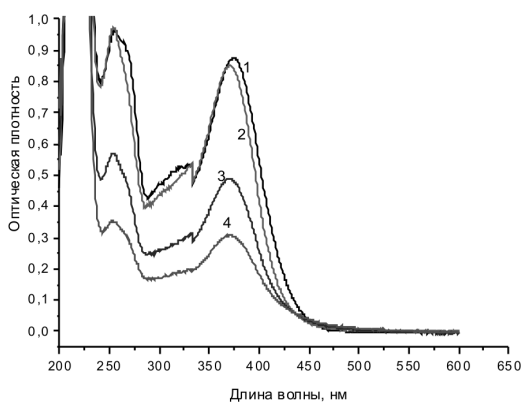


Рис. 1. Спектры поглощения кверцетина и его комплекса с коллагеном:
 1 — кверцетин, $5 \cdot 10^{-5}$ М; 2 — кверцетин, $5 \cdot 10^{-5}$ М + коллаген,
 0,06 мг/мл; 3 — спектр поглощения комплекса через 30 мин;
 4 — спектр поглощения комплекса через 60 мин.
 Среда измерения — 20мМ Трис – HCl, pH 7,4, T=20° С

Спектры флуоресценции кверцетина и его комплекса с коллагеном.

На рис.2 представлены спектры флуоресценции кверцетина и его комплекса с коллагеном. При облучении светом длиной волны 370 нм молекулы кверцетина флуоресцируют с максимумом в области 545 нм. Образование комплекса с коллагеном сопровождается уменьшением интенсивности флуоресценции флавонола при длине волны 545 нм, по-видимому, вследствие ее тушения молекулами коллагена.

Динамика изменения оптической плотности кверцетина и его комплекса с коллагеном. Известно, что окисление флавоноидов сопровождается характерными изменениями в их спектрах поглощения [6, 7]. В частности, у флавонолов в процессе окисления наблюдаются выцветание и исчезновение полос 1 и 2, при этом в спектре поглощения флавонолов

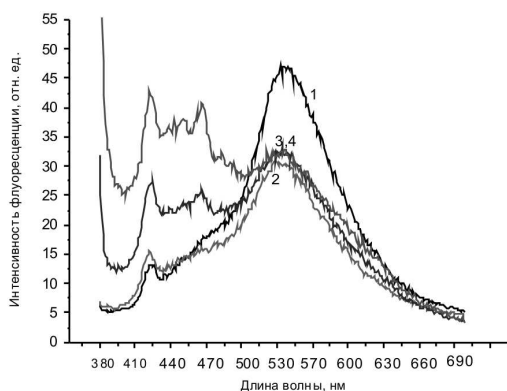


Рис. 2. Спектры флуоресценции кверцетина и комплекса с коллагеном: 1 — кверцетин, $5 \cdot 10^{-5}$ М; 2 — кверцетин, $5 \cdot 10^{-5}$ М + коллаген, 0,06 мг/мл; 3 — спектр флуоресценции комплекса через 30 мин.; 4 — спектр флуоресценции комплекса через 60 мин. $\lambda_{возб} = 370$ нм. Среда измерения — 20мМ Трис – HCl, pH 7,4, T=20° С

появляется новый максимум при 325 нм (полоса 3), который при дальнейшем окислении сначала увеличивается, а затем уменьшается и исчезает.

Кроме спектральных изменений в области полос 1 и 2, окисление флавонолов сопровождается появлением полосы поглощения в красной области спектра (500–600 нм), однако величины спектральных изменений в этом случае на порядок ниже, чем спектральные изменения в УФ и желтой области спектра.

Как следует из представленного рис. 3, оптическая плотность в максимуме (375 нм) поглощения света кверцетином в растворе с 20 мМ Трис – HCl, pH 7,4 медленно падает, что, казалось бы, свидетельствует об автоокислении флавоноида. Однако в присутствии коллагена процесс ускоряется и, возможно, это связано не только с процессом автоокисления кверцетина, но и с процессом связывания флавонола с белком. Такое развитие событий показывают и кривые с увеличенной концентрацией коллагена.

Определение константы связывания флавонолов с коллагеном по данным флуоресценции. Для определения константы связывания флавонолов с коллагеном были сняты спектры флуоресценции кверцетина в присутствии различных концентраций коллагена. В этих экспериментах коллаген выступает в качестве молекул тушителя флуоресценции флавонола (см. рис. 2). Из графика зависимости интенсивности флуоресценции кверцетина (рис. 4) от концентрации коллагена были определены константы связывания флавонолов с белком. Из графика следует, что константа связывания кверцетина с коллагеном равна $8,29 \cdot 10^{-8}$ М.

Изучение динамики рассеяния света в образце с коллагеном в присутствии флавонолов. Динамику фибриллообразования можно регистрировать также по изменению светорассеяния. На рис. 5 представлены

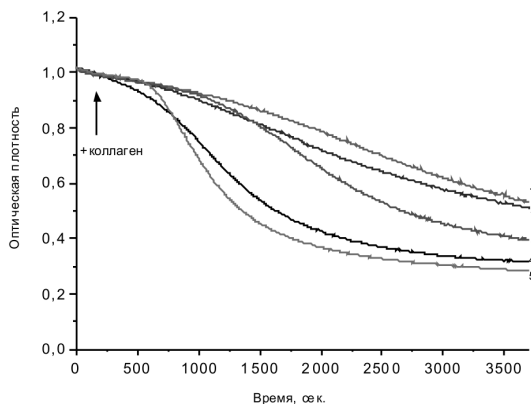


Рис. 3. Динамика изменения оптической плотности кверцетина ($5 \cdot 10^{-5}$ М) при действии коллагена различной концентрации: 1 — кверцетин; 2 — 0,015 мг/мл; 3 — 0,03 мг/мл; 4 — 0,06 мг/мл; 5 — 0,12 мг/мл; $\lambda = 375$ нм. Среда измерения — 10мМ Трис — HCl, pH 7,4, $T = 20^\circ \text{C}$

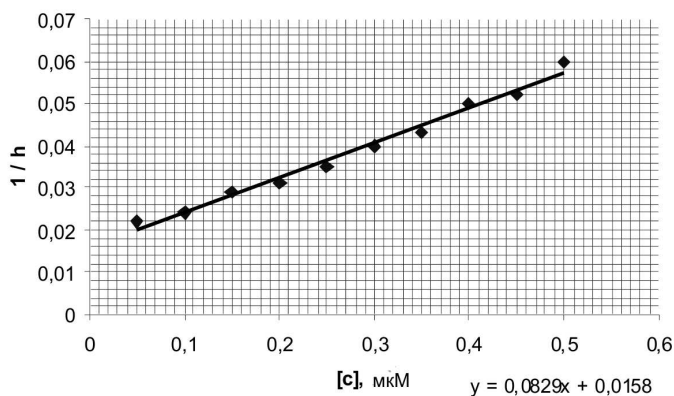


Рис. 4. Определение константы связывания кверцетина с коллагеном по данным его флуоресценции при взаимодействии с белком разной концентрации

кривые изменения светорассеяния в контроле и в образцах, содержащих различные концентрации коллагена. Как показали эксперименты, в контрольном образце, не содержащем флавонола, процесс фибриллообразования при выбранных условиях начинается приблизительно через десять минут инкубации и развивается очень медленно. В присутствии флавонола процесс образования фибрилл ускоряется и начинается ранее, чем в контроле. Это свидетельствует об ускорении фибриллообразования, индуцированного флавонолами [8]. Как видно из рис. 5, сам кверцетин в измеряемой среде без коллагена не дает заметного увеличения интенсивности рассеянного света. В других экспериментах (данные не приведены) присутствие глобулярного

белка — сывороточного альбумина человека — также не влияет на измеряемый параметр.

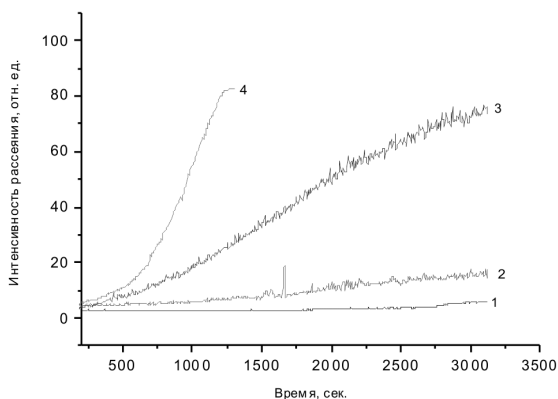


Рис. 5. Динамика рассеяния света под углом 90° на длине волны 400 нм в образце с кверцетином ($5 \cdot 10^{-5}$ М) при действии различной концентрации коллагена: 1 — кверцетин; 2 — коллаген- 0,03 мг/мл; 3 — коллаген- 0,06 мг/мл; 4 — коллаген- 0,12 мг/мл; $\lambda = 400$ нм. Среда измерения: 20 мМ Трис – HCl, pH 7,4, T = 20° C

Методом фотоно-корреляционной спектроскопии было получено, что средний размер частиц в образце с коллагеном несколько возрос после добавления кверцетина, что очевидно было причиной наблюдаемого выше роста светорассеяния.

ТАБЛИЦА 1

Размеры частиц в образце с коллагеном до и после добавления кверцетина

Образец	Средний размер, нм	Количество, %
Контроль	$7,4 \pm 0,9$	94,28
Коллаген+кверцетин, через 15 мин	$8,1 \pm 1,4$	99,01
Коллаген+кверцетин через 30 мин	$10,4 \pm 1,6$	100,00

Обнаруженные нами изменения размеров частиц в образце с коллагеном предполагают возможность агрегации молекул коллагена.

Исследование влияния флавонолов на термоденатурацию коллагена методом дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК). Термограммы плавления коллагена характеризуются наличием температурного пика, который приходится на 39° C. При данной температуре наступает денатурация белка. На рис. 6 представлены термограммы плавления коллагена (1) до и после дополнительной очистки коллагена (2) в фосфатном буфере. На термограмме (1) появляется ещё один пик

($T = 45^\circ\text{C}$) или образуются фракции коллагена с температурой денатурации $T = 45^\circ\text{C}$ в высокотемпературном плече термограммы, что может свидетельствовать о переходе белка из мономерной формы в димерную, т.е. об агрегации молекул белка. Для того чтобы избавиться от данного пика, была проведена дополнительная очистка коллагена. Как видно из рис. 6 на термограмме (2) после очистки коллагена образования ещё одного пика не происходит.

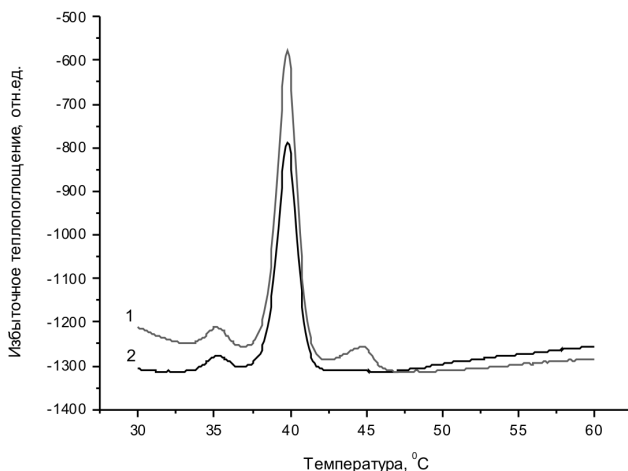


Рис. 6. Термограммы плавления коллагена в фосфатном буфере:
 1 — коллаген неочищенный, 0,3 мг/мл, 2 — коллаген очищенный,
 0,3 мг/мл. Среда измерения: 20 мМ Na_2HPO_4 + 145 мМ NaCl , pH 7,4.
 Температура инкубации: $T = 4^\circ\text{C}$

В кислой среде коллаген образует раствор из отдельных молекул тропоколлагена. При доведении pH до нейтральных значений молекулы тропоколлагена способны спонтанно собираться в фибриллы. При этом восстанавливается также характерная для фибрилл поперечная полосатость. Когда коллаген находится в кислой среде, фибриллы не образуются или образуются очень медленно в течение нескольких суток в зависимости от концентрации белка и температуры среды инкубации [9].

Для того, чтобы понять какую роль могут играть в описанных процессах количество гидроксильных групп в молекуле флавонола, мы использовали также кемпферол (ОН в положении 41) и мирицетин (ОН в положении 2¹, 3¹, 4¹) (рис. 7). На рис. 8 представлены термограммы плавления коллагена при действии флавонолов: мирицетина, кверцетина и кемпферола в трис-буфере. Термограмма плавления коллагена характеризуется температурным пиком, который приходится на 48°C . В присутствии мирицетина температура плавления коллагена увеличивается, т. е. фибриллы коллагена становятся более термостабильными.



Рис. 7. Структурные формулы исследуемых веществ

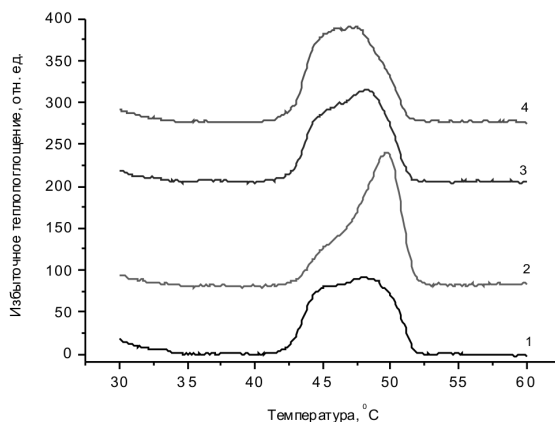


Рис. 8. Термограммы плавления коллагена (0,27 мг/мл) при действии флавонолов ($1,25 \cdot 10^{-5}$ М) кверцетина, мирицетина и кемпферола:
 1 — коллаген; 2 — коллаген + мирицетин; 3 — коллаген + кверцетин, 4 — коллаген + кемпферол. Среда измерения: 20 мМ Трис – HCl, pH 7,4. Время инкубации: 1 час; температура инкубации: $T = 22^\circ C$

Известно, что тепловая денатурация коллагена сопровождается разрушением водородных связей между субъединицами белка и переходом спиральной структуры в неупорядоченный клубок. В стабилизации молекул коллагена большую роль играют как гидрофобные взаимодействия, определяемые, большей частью, остатками глицина, так и водородные связи, образованные между остатками гидроксипролина [10]. Молекулы полифенолов, к числу которых относится мирицетин, имеют большое количество гидроксильных

групп, но при этом плохо растворимы в воде благодаря наличию гидрофобных ароматических колец. Мы предполагаем, что сочетание сравнительно высокой гидрофобности и способности образовывать водородные связи позволяет этим молекулам внедряться в определенные области фибрилл коллагена и способствовать стабилизации их структуры.

ТАБЛИЦА 2

Термодинамические параметры плавления коллагена

Образцы	Температура максимума плавления коллагена T_m , °C	Полуширина фазового перехода, $T_{1/2}$
1. Контроль	48,0	2,6
2. Мирицетин	49,8	1,9
3. Кверцетин	48,1	2,4
4. Кемпферол	47,5	2,3

При действии кверцетина и кемпферола на коллаген температура денатурации белка практически не отличается от контроля, хотя также происходит незначительное сужение пика. Стоит отметить, что стабилизирующее воздействие мирицетина выше, чем кверцетина и кемпферола, что, по-видимому, свидетельствует о формировании большего количества водородных связей между гидроксигруппами мирицетина и гидроксильными аминокислотами, входящими в состав молекул коллагена.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что при взаимодействии кверцетина с фибриллярным белком — коллагеном типа-1 происходит незначительный сдвиг максимума поглощения флавонола (полосы 1) в коротковолновую область и с течением времени уменьшается величина оптической плотности в данном диапазоне спектра. Коллаген также способствует уменьшению интенсивности флуоресценции кверцетина, что предполагает в большей степени связывание флавонола белком. По спектру флуоресценции была определена константа связывания кверцетина с коллагеном. Была показана динамика фибриллообразования зарегистрированная по изменению светорассеяния. Методом фотоно-корреляционной спектроскопии было получено, что средний размер частиц в образце с коллагеном несколько возрастал после добавления кверцетина, что очевидно было причиной наблюдаемого выше роста светорассеяния. При исследовании влияния флавонолов на термоденатурацию коллагена методом дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) показано, что температура максимума плавления коллагена и полуширина фазового перехода в определенной степени зависят от количества гидроксильных групп в молекуле флавонола. При их увеличении возрастает стабилизирующее действие полифенола на белок с образованием большего количества водородных связей, что предполагает активизацию фибриллообразования в белке.

Список литературы

1. *Williams R.J., Spenger J.P.E., Rice-Evans C.* // *Free Radical Biology & Medicine*. 2004. V. 36. № 7. P. 838.
2. *Rice-Evans C.A., Packer L.* *Flavonoids in Health and Disease*. New York, 1997.
3. STEM/TEM studies of collagen fibril assembly / D.F. Holmes, H.K. Graham, J.A. Trotter, K.E. Kadler // *Micron*. 2001. V. 32. № 3. P. 273–285.
4. *Price P.J.* Preparation and use of rat-tail Collagen // *TCA Manual*. 1975. V. 1. P. 43–44.
5. *Markham K.R.* *Techniques of Flavonoid Identification*. London: Academ. Press, 1982. 113 p.
6. Phenolics as potential antioxidant therapeutic agents: Mechanism and actions / M.A. Soobrattee [et al.] // *Mutat. Res*. 2005. V. 579. № 1/2. P. 200–213.
7. *Cermak R., Wolffram S.* The potential of flavonoids to influence drug metabolism and pharmacokinetics by local gastrointestinal mechanisms // *Curr. Drug Metab*. 2006. V. 7. P. 729–744.
8. Calcium-dependent aggregation and fusion of phosphatidylcholine liposomes induced by complexes of flavonoids with divalent iron / Y.S. Tarahovsky, E.A. Yagolnik, E.N. Muzafarov, B.S. Abdrasilov, Yu.A. Kim // *Biochim. Biophys. Acta*. 2012. V. 1818. № 3. P. 695–702.
9. *Музафаров Е.Н., Ягольник Е.А., Ким Ю.А.* Защитный эффект экстрактов растений при воздействии УФ-излучения на коллаген, липидные мембраны и кожу // *Фенольные соединения: фундаментальные и прикладные аспекты: сб. статей*. Научный мир, 2010. С. 204–214.
10. *Яковлев Г.П., Блинова К.Ф.* *Растения для нас: справочное издание*. СПб.: Учебная книга, 1996. 652 с.

Ягольник Елена Андреевна (yea_88@mail.ru), к.б.н., ассистент, кафедра биологии, Тульский государственный университет.

Музафаров Евгений Назибович (enmuzafarov@mail.ru), д.б.н., зав. кафедрой, кафедра биологии, Тульский государственный университет.

Ким Юрий Александрович (yuk01@ Rambler.ru), д.ф.-м.н., в.н.с., Институт биофизики клетки РАН, Пущино.

Тараховский Юрий Семенович (tarahov@ Rambler.ru), д.б.н., в.н.с., Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН, Пущино.

The interaction of flavonol quercetin with collagen

E. A. Yagolnik, E. N. Muzafarov, Yu. A. Kim, Yu. S. Tarahovsky

Abstract. This research shows that there is a shift to shorter wavelengths and the magnitude of optical density in the spectrum is decreased in the reaction

flavonol quercetin with the fibrillar collagen protein type-1 in the absorption spectrum of flavonol (strip 1). Collagen also helps to reduce the intensity of fluorescence of quercetin, indicating that flavonol connect with protein. By photon correlation spectroscopy it was found that the average particle size in the sample with collagen increases after the addition of quercetin, suggesting the possibility of aggregation protein with flavonol.

Keywords: quercetin, collagen, fibrillar protein, fotona-correlational spectroscopy, differential scanning calorimetry.

Yagolnik Elena (yea_88@mail.ru), candidate of biological sciences, assistant, department of biology, Tula State University.

Muzafarov Eugeny (enmuzafarov@mail.ru), doctor of biological sciences, head of department, department of biology, Tula State University.

Kim Yuri (yuk01@rambler.ru), doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, Institute of Cell Biophysics, Pushchino.

Tarakhovsky Yury (tarahov@rambler.ru), doctor of biological sciences, leading researcher, Institute of Theoretical and Experimental Biophysics, Pushchino.

Поступила 26.01.2015

CONTENTS

MATHEMATICS

<i>Gorbachev D. V.</i> Some inequalities for discrete positive definite functions	5
<i>Logacheva E. S.</i> The problem of the conjugation of finitely generated subgroups in the <i>HNN</i> -extension of a tree product of cyclic groups with cyclic amalgamation	13

MECHANICS

<i>Glagolev V. V., Markin A. A.</i> Thermomechanics destruction of bodies with crack-like defect	36
<i>Markin A. A., Kozlov V. V.</i> Combined shear compressible nonlinearly elastic hollow cylinder	42
<i>Markin A. A., Kharlamov A. S.</i> Geometry of cross-sections of the beam at its finite pure bending with considering a shift deformations	53
<i>Skobeltsyn S. A., Tolokonnikov L. A.</i> Diffraction of a plane sound wave by an elastic spheroid with a non-uniform covering in the presence of a spreading surface	64
<i>Tolokonnikov L. A.</i> Diffraction of sound waves by an elastic cylinder with a non-uniform coating in a plane waveguide with absolutely rigid boundaries	76
<i>Khristich D. V., Astapov Yu. V.</i> Finite non-isothermal deforming of a rubber sphere	84

PHYSICS

<i>Golovnev Yu. F., Somova N. Yu.</i> Education miyaneh excitons in double quantum wells	91
<i>Shopin S. A., Skobeltsyn S. A.</i> Analysis of wideband gradiometer data using superimposed epochs method	98

CHEMISTRY

<i>Yudina N. Yu., Kozlova T. N., Melnikov P. V., Arlyapov V. A.</i> Select of the receptor element BOD biosensor based on substrate specificity and growth parameters of yeast <i>Debaryomyces hansenii</i>	108
---	-----

BIOLOGY

<i>Yagolnik E. A., Muzafarov E. N., Kim Yu. A., Tarahovsky Yu. S.</i> The interaction of flavonol quercetin with collagen	121
---	-----

РЕДКОЛЛЕГИЯ

Ответственный редактор:

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет
email: ivaleryi@mail.ru

Заместитель ответственного редактора:

Маркин Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, Тульский государственный университет
email: markin@tsu.tula.ru

Ответственный секретарь:

Скобельцын Сергей Алексеевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет
email: skbl@rambler.ru

Члены редколлегии:

Алферов Валерий Анатольевич — кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой химии, директор естественнонаучного института, Тульский государственный университет
email: antsser@mail.ru

Буркин Игорь Михайлович — доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, Тульский государственный университет
email: i-burkin@yandex.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого
email: dobrovol@tspu.tula.ru

Левин Даниил Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики, Тульский государственный университет
email: levin@physics.tsu.tula.ru

Музафаров Евгений Назибович — доктор биологических наук, доцент, заведующий кафедрой биотехнологии, Тульский государственный университет
email: enmuzafarov@mail.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет
email: tolokonnikovla@mail.ru

Кротов Вениамин Григорьевич (Республика Беларусь) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций, Белорусский государственный университет
email: vgkrotov@mail.ru

Литвиненко Владимир Викторович (Украина) — доктор технических наук, старший научный сотрудник, заместитель директора, Институт электрофизики и радиационных технологий, Национальная академия наук Украины
email: wlytvynenko@ukr.net

Матвейко Николай Петрович (Республика Беларусь) — доктор химических наук, профессор, заведующий кафедрой физикохимии материалов и производственных технологий, Белорусский государственный экономический университет
email: matveiko_np@mail.ru

Мирсалимов Вагиф Мирахмедович (Азербайджан) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой технической механики, Азербайджанский технический университет
email: mir-vagif@mail.ru

Темиргалиев Нурлан Темиргалиевич (Казахстан) — доктор физико-математических наук, профессор, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева
email: ntmath10@mail.ru

Шабозов Мирганд Шабозович (Республика Таджикистан) — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Республики Таджикистан, заведующий отделом теории функций и функционального анализа, Институт математики, Академия наук Республики Таджикистан
email: shabozov@mail.ru

EDITORIAL BOARD

Executive Editor:

Ivanov Valerii — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University
email: ivaleryi@mail.ru

Deputy Executive Editor:

Markin Alexey — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Modeling, Tula State University
email: markin@tsu.tula.ru

Executive Secretary:

Scobeltsyn Sergey — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University
email: skbl@rambler.ru

Editorial Board:

Alferov Valeriy — Candidate of Chemical Sciences, Head of the Department of Chemistry, Director of the Institute of Natural Sciences, Tula State University
email: antsser@mail.ru

Burkin Igor — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Analysis, Tula State University
email: i-burkin@yandex.ru

Dobrovolskiy Nicolai — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Leo Tolstoy Tula State Pedagogical University
email: dobrovol@tspu.tula.ru

Levin Daniil — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Physics, Tula State University
email: levin@physics.tsu.tula.ru

Muzafarov Evgeny — Doctor of Biological Sciences, Head of the Department of Biotechnology, Tula State University
email: enmuzafarov@mail.ru

Tolokonnikov Lev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University
email: tolokonnikovla@mail.ru

Krotov Veniamin (Belarus) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of the Theory of Functions, Belarusian State University
email: vgkrotov@mail.ru

Litvinenko Vladimir (Ukraine) — Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, Deputy Director, Institute of Electrophysics and Radiation Technologies, National Academy of Sciences of Ukraine
email: wlytvynenko@ukr.net

Matveiko Nikolai (Belarus) — Doctor of Chemical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics and Chemistry of Materials and Manufacturing Technology, Belarusian State Economic University
email: matveiko_np@mail.ru

Mirsalimov Vagif (Azerbaijan) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Technical Mechanics, Azerbaijan Technical University
email: mir-vagif@mail.ru

Temirgaliev Nurlan (Kazakhstan) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Gumilev Eurasian National University
email: ntmath10@mail.ru

Shabozov Mirgand (Tajikistan) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Full Member of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Head of the Department of Function Theory and Functional Analysis, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan
email: shabozov@mail.ru

ПОРЯДОК ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ СТАТЕЙ

1. Общие требования к рукописям статей и порядок их представления

1.1. В естественнонаучной серии журнала «Известия ТулГУ» печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания: математики, механики, прикладной математики и информатики, физики, химии, биологии, экологии, наук о Земле, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. Представляемая для публикации рукопись статьи должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи обзорного, биографического, рекламного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по заказу редколлегии издания.

1.2. Общий объем рукописей статей не должен превышать, как правило, 16 страниц текста, включая рисунки и таблицы. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии.

1.3. Рукопись статьи представляют в двух копиях: бумажной, распечатанной в 1 экземпляре на одной стороне листа белой бумаги формата А4, и в электронной — на электронном носителе или по электронной почте. К электронной копии статьи необходимо приложить исходные файлы иллюстраций, выполненных в одном из форматов: для графиков и других векторных рисунков — EPS с внедренными шрифтами, для фотографий и других растровых рисунков — TIFF с разрешением не меньше 300 dpi. Каждая иллюстрация должна быть записана в отдельном файле. Допускаются рисунки, сделанные в Word 2003, а также растровые изображения, вставленные в Word, но без потери качества.

1.4. На бумажной копии необходимо написать «В печать» и расписаться всем авторам, что означает их согласие на передачу Издательству ТулГУ прав на распространение материалов статьи с помощью печатных и электронных носителей информации.

1.5. По запросу редколлегии издания авторы обязаны предоставить акты экспертизы о возможности открытой публикации материалов статьи.

1.6. Все представленные рукописи статей проходят рецензирование. Порядок рецензирования установлен соответствующим документом, размещенным на сайте Издательства ТулГУ. Решение об опубликовании статьи принимается редколлегией издания на основании рецензии.

1.7. Просьба редколлегии о переработке рукописи статьи не означает, что статья принята к публикации; после переработки рукопись статьи вновь рассматривается редколлегией издания.

1.8. В случае непринятия к публикации статьи по содержательному аспекту редколлегия издания направляет автору мотивированный отказ. Рукописи статей, оформленные не в соответствии с указанными правилами, редколлегией не рассматриваются и возвращаются авторам.

1.9. В опубликованной статье указывается дата поступления рукописи статьи в редколлегию. В случае существенной переработки рукописи статьи указывается дата получения окончательного текста статьи.

1.10. Публикация статей для аспирантов и докторантов бесплатная.

1.11. Статью можно прислать по почте: 300012, г. Тула, пр. Ленина 92, ТулГУ, кафедра ПМИИ, или принести лично по адресу: г. Тула, ул. Агеева 1-б, учебный корпус ТулГУ № 12, кафедра ПМИИ, комн. 208. Электронный вариант статьи следует направлять по e-mail: izvns_tsu@mail.ru.

2. Правила оформления статьи

2.1. Текст должен быть набран в *tex*'е (желательно версия AMS LaTeX 2e). Допустимо использование Word 2003, но тогда все формулы, включая одиночные символы, должны быть аккуратно набраны средствами Microsoft Equation или MathType и они обязательно должны быть редактируемыми.

2.2. Основной размер шрифта 11 пунктов. Ширина полосы набора 134 мм, ориентировочная высота — 185 мм.

2.3. Обращаем внимание авторов на порядок следования основных элементов статьи:

- УДК (индекс универсальной десятичной классификации).
- Название.
- Авторы.
- Аннотация.
- Ключевые слова.
- Ссылки на гранты.
- Основной текст.
- Список литературы.
- Информация об авторах.
- Английские переводы названия, аннотации, ключевых слов и информации об авторах.

2.4. Уточним правила набора некоторых элементов статьи.

- Числа в УДК разделяются знаками препинания без пробелов.
- Название статьи должно быть набрано строчными буквами, начиная с прописной (желательно использовать не более 12 слов): «Название статьи ...», но не «НАЗВАНИЕ СТАТЬИ ...».
- Порядок следования ФИО авторов (инициалы, фамилия) в алфавитном порядке.

- Объем аннотации до 10 строчек мелким шрифтом.

- Объем ключевых слов до двух строчек мелким шрифтом.

- Основной текст может разделяться на нумеруемые пункты и, возможно, подпункты с двойной нумерацией. В этом случае вместо терминов «параграф», «раздел», «подраздел» необходимо использовать термины «пункт», «подпункт». Тройная нумерация пунктов не допускается. Для выделения названий небольших частей статьи можно применять нестандартную нумерацию, используя при этом курсив или полужирный шрифт.

- Нумерация формул, рисунков и таблиц должна быть сквозной (одинарной) по всему тексту статьи: (1), (2), ...; рис. 1, рис. 2, ...; табл. 1, табл. 2, ... Не рекомендуется нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте. Указания на

диапазоны желательно оформлять в формате «начало диапазона, короткое тире, конец диапазона». Например «(1), (2), (3)» желательно заменить на «(1)–(3)». С другой стороны, вместо «(1)–(2)» нужно использовать «(1), (2)». Эти правила следует соблюдать для всех видов нумераций.

— Нумерация утверждений (теорем, лемм, следствий, гипотез и т.п.), замечаний, определений и т.п. независима друг от друга и также сквозная. Утверждения, в отличие от замечаний и определений, набираются курсивом. Не рекомендуется помечать в тексте курсивом определяемые термины, если они общеизвестны.

— Подпись к рисунку размещается внизу, а к таблице — вверху. Рекомендуется использовать для подписи одну-две строки мелким шрифтом. При необходимости более подробное описание можно привести в тексте статьи и сослаться на комментируемые рисунок или таблицу.

— Рисунки и таблицы желательно размещать непосредственно после первой ссылки на них.

— Многострочные формулы набираются по центру без выравнивания, с повторением знака операции на разрыве (точка как знак умножения заменяется на крестик). Специальным образом выравниваются формулы, только если это действительно необходимо, например, для систем уравнений. Формулы в строке отделяются запятой (не точкой с запятой!) и после запятой используется увеличенный пробел.

— Не допускаются команды принудительного разрыва строк: `\linebreak`, `\newline`, `\`, и их аналоги Word.

— Не следует переопределять стандартные команды и окружения разметки TeX, например, `\section`, `\subsection`, `thebibliography`, ... В то же время допустимо вводить свои команды для сокращения записи, например, можно переопределить стандартную команду `\с`. Однако чем меньше будет новых и переопределяемых команд, тем лучше.

— Ссылки в тексте на цитируемую литературу в тексте даются в квадратных скобках последовательно: [1], [2], ... Подряд идущие ссылки заключаются в одни квадратные скобки в порядке возрастания: «[5], [1], [2], [3]» лучше заменить на «[1–3, 5]». Если ссылки делаются средствами TeX автоматически, то «`\cite{1}`», «`\cite{2}`», «`\cite{3}`» необходимо заменить на «`\cite{1,2,3}\verb`» (без пробелов!).

— Ссылка в тексте на цитируемую литературу с уточнением позиции в источнике оформляется также в квадратных скобках, где вначале идет номер источника, а затем через запятую позиция, например, «[1, с. 351]». Вместо сокращения «стр.» лучше использовать «с.». Подобные ссылки не объединяются с соседними в одни квадратные скобки: «[2], [1, с. 351], [3–6]».

— При использовании нестандартных аббревиатур, сокращений и условных обозначений необходимо предварительно в тексте их расшифровать. При наличии у иностранных фирм и организаций русской транскрипции необходимо давать именно ее с указанием в круглых скобках страны. Греческие и латинские слова, необходимо набирать курсивом: *Rhodospirillum rubrum*, *apriori*, ...

— Список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.05-2008. В большинстве случаев отдельная позиция в нем имеет следующий формат: «Номер ссылки», «Авторы» курсивом (для каждого автора «Фамилия», затем «Инициалы», но не наоборот). Далее, если ссылка на книгу, то «Название. Город: Издательство, Год. Общее число страниц», если ссылка на журнал — «Название статьи // Название журнала. Год. Том. Номер. Страницы».

Для городов используются общепризнанные сокращения: «М.» для Москвы, «СПб.» («Л.») для Санкт-Петербурга (Ленинграда), «Н.У.» для Нью-Йорка, «Л.» для Лондона. Примеры оформления позиций, в том числе нестандартных, приведены в п. 3.

— Ни в коем случае нельзя приводить ссылку на источник без указания года и другой информации, отсутствие которой затрудняет его поиск.

2.5. В конце статьи после списка литературы указываются сведения о каждом авторе:

- обязательно полностью фамилия, имя, отчество;
- e-mail для переписки;
- ученая степень (сокращенно), ученое звание (полностью), должность и место работы;
- местонахождение организации: страна, если не РФ, город;
- перевод на английский язык названия статьи, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов, вышеперечисленных сведений об авторах.

3. Примеры оформления ссылок из списка литературы

Монографии

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
3. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). 581 с.
4. *Никольский С.М.* Курс математического анализа: учеб. для физ.-мат. спец. вузов. 4-е изд., перераб. и доп. Т. 1. М.: Наука, 1990. 528 с.
5. *DeVore R.A., Lorentz G.G.* Constructive approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 446 p.

Периодические издания

6. *Бабенко А.Г., Кракин Ю.В.* О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12. Вып. 1. С. 27–56.
7. *Иванов В.И., Скобелъцын С.А.* Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132–145.
8. *Иванов В.И., Чертова Д.В., Лю Юнпин.* Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 3. С. 112–126.
9. *Иванов В.И., Чертова Д.В., Ли Йонг Пинг.* Теорема Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом // Математические заметки. 2008. Т. 84. № 1. С. 136–139.
10. *Махнев А.А., Падучих Д.В.* О локально грассмановых графах // Доклады РАН. 2007. Т. 415. № 4. С. 450–454.
11. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Известия АН СССР. Сер. Мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
12. *Makhnev A.A.* On the graphs with μ -subgraphs isomorphic to $K_{u \times 2}$ // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2. 2001. V. 2. P. S169–S178.

13. *Caldebrank R., Kantor W.M.* The geometry of two weight codes // Bull. L. Math. Soc. 1986. V. 18. P. 97–122.

14. *Geronimus J.* On some extremal properties of polynomials // Ann. Math. 1936. V. 37, N 2. P. 483–517.

Другие издания

15. *Горбачев Д.В.* Некоторые положительно определенные радиальные функции // Современные проблемы математики, механики, информатики: матер. Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рождения Л.А. Толоконникова. Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. С. 39–41.

16. *Махнев А.А., Нирова М.С.* Узкие частичные четырехугольники и их автоморфизмы // Пробл. теорет. и прикл. математики: тр. XXXVII молодеж. конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. С. 25–27.

17. *Иванов В.И.* Задачи Турана для периодических положительно определенных функций // Ряды Фурье и их приложения: тез. докл. III Междунар. симп. Ростов на Дону: Изд-во ЮФУ, 2005. С. 18–19.

18. *Кораблева В.В.* Параболические подстановочные представления групп $E8(q)$ / Челябин. гос. ун-т. Деп. в ВИНТИ 29.10.99, № 3224–В99. 221 с.

19. *Хабиров С.В.* Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики: препринт / Ин-т механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 1998. 33 с.

20. *Алеев Р.Ж.* Центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Челябинск, 2000. 355 с.

Четыре автора и более

21. Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев, В.Л. Бидерман, К.К. Лихарев, В.М. Макушин, Н.Н. Малинин, В.И. Феодосьев. Т. 2. М.: Машгиз, 1958. 975 с.

22. Микробные биосенсоры для определения биологического потребления кислорода (обзор) / О.Н. Понаморева, В.А. Арляпов, В.А. Алфёров, А.Н. Решетиллов // Прикладная биохимия и микробиология. 2011. Т. 47. № 1. С. 5–15.

Научное издание

ИЗВЕСТИЯ

Тульского государственного университета

Естественные науки

Выпуск 2

Редактор Т.Я. Селищева

Набор и верстка Р.А. Вепринцев

Учредитель:

ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»

Изд. лиц. ЛР № 020300 от 12.02.97. Дата выхода в свет 10.04.15.

Формат бумаги 70 × 100/16. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 7,3.

Тираж 500 экз. Заказ 028

Цена свободная

Тульский государственный университет
300012, г. Тула, просп. Ленина, 92

Отпечатано в Издательстве ТулГУ
300012, г. Тула, просп. Ленина, 95